Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-3 Probabilidades y Estadística, Otoño 2012

Roberto Cortez
Francisco Castro
Alfredo Torrico

Control 1

9 de abril de 2012
Tiempo: 3 horas

P1. (a) (2,0 ptos.) Considere un experimento cuyo espacio muestral Ω tiene una cantidad infinita numerable de elementos. Pruebe que no todos los puntos (singletons) pueden tener la misma probabilidad. ¿Es posible que todos los puntos tengan probabilidad estrictamente positiva?

(b) (2,0 ptos.) Sea $E_1, \ldots, E_n$ una colección de eventos independientes. Muestre que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - \mathbb{P}(E_i)).$$

(c) (2,0 ptos.) Considere n personas que se deben ordenar, dentro de las cuales hay un matrimonio. Si las personas se ordenan al azar en una línea, ¿cuál es la probabilidad de que el matrimonio quede junto? ¿Cuál es esta probabilidad si las personas se ordenan en círculo?

P2. (a) (1,5 ptos.) Sea Z una variable geom(p). Muestre que $\mathbb{P}(Z > k) = (1-p)^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Se sabe que el evento en que un teléfono celular de la marca A se rompe cuando cae al suelo tiene probabilidad p, independiente de las otras caídas. Para un celular de la marca B se cumple lo mismo, pero con probabilidad q de romperse, donde $q > p$. Usted se compra un celular y escoge al azar la marca, y después de k caídas aún funciona.

(b) (1,5 ptos.) ¿Cuál es la probabilidad de que haya escogido la marca A? ¿Qué pasa cuando k es grande? Comente. *Indicación:* trabaje con la variable aleatoria X del número de la caída en que el celular se rompe. ¿Qué distribución tiene X cuando la marca es A?

(c) (1,5 ptos.) ¿Cuál es la probabilidad de que su celular vuelva a sobrevivir otras k caídas?

(d) (1,5 ptos.) Suponga que su celular efectivamente es de la marca A. Suponga también que la cantidad de caídas que ocurren mensualmente es una variable Y con distribución de Poisson con parámetro $\lambda > 0$. Calcule la probabilidad de que su celular sobreviva un mes más. *Indicación:* utilizando una propiedad conocida, condicione en los posibles resultados de Y. Puede suponer que las variables X e Y son *independientes*, es decir, que $\mathbb{P}(X \in E \mid Y \in F) = \mathbb{P}(X \in E)$ para todo E, F subconjuntos cualquiera de $\mathbb{R}$.

P3. (a) Sea X una variable aleatoria discreta con función de distribución discreta p_X. Dados $a \neq 0$ y $b \in \mathbb{R}$, definimos la variable aleatoria $Y = aX + b$.

1) (1,0 pto.) Calcule p_Y en términos de p_X.
2) (1,0 pto.) Si $X \sim \text{bin}(n,p)$, $a = -1$ y $b = n$, ¿qué tipo de variable es Y? Interprete el resultado en términos de lanzamientos de monedas.

(b) Se dispone de m bolitas ubicadas en una lista ordenada, y cada una se pinta escogiendo al azar uno de n posibles colores. Sea X la variable aleatoria correspondiente a la posición de la primera bolita cuyo color se repite con el de alguna otra bolita que está después en la lista; o bien $X = \infty$ si no se repite ningún color.

1) (2,0 ptos.) Calcule $\mathbb{P}(X = \infty)$. ¿Con qué ejemplo visto en clases puede relacionar el resultado obtenido?
2) (2,0 ptos.) Para $k = 1, \ldots, m$, calcule $\mathbb{P}(X = k)$.

Cuadro 1: **Resumen distribuciones**

nombre	parámetros	notación	tipo	soporte	distribución	esperanza	varianza	f.g.m.
Bernoulli	$p \in (0,1)$	$X \sim \text{Bernoulli}(p)$	discreta	$\{0,1\}$	$p_X(0) = 1-p$ $p_X(1) = p$	p	$p(1-p)$	$1-p+pe^t$
binomial	$n \in \mathbb{N}^*$, $p \in (0,1)$	$X \sim \text{bin}(n,p)$	discreta	$\{0,1,\ldots,n\}$	$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$(1-p+pe^t)^n$
geométrica	$p \in (0,1)$	$X \sim \text{geom}(p)$	discreta	$\{1,2,3,\ldots\}$	$p_X(k) = (1-p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$
binomial negativa	$r \in \mathbb{N}^*$, $p \in (0,1)$	$X \sim \text{BN}(r,p)$	discreta	$\{r, r+1, \ldots\}$	$p_X(k) = \binom{k-1}{r-1} (1-p)^{k-r} p^r$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$	$\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r$
Poisson	$\lambda > 0$	$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$	discreta	$\{0,1,2,\ldots\}$	$p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$
uniforme	$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$	$X \sim \text{unif}(a,b)$	continua	$[a,b]$	$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
exponencial	$\lambda > 0$	$X \sim \exp(\lambda)$	continua	$[0,\infty)$	$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}$ $\forall t < \lambda$
normal	$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$	$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	continua	$\mathbb{R}$	$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2	$e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$
gamma	$\theta > 0$, $\lambda > 0$	$X \sim \text{gamma}(\theta, \lambda)$	continua	$[0,\infty)$	$f_X(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$	$\frac{\theta}{\lambda}$	$\frac{\theta}{\lambda^2}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\theta$ $\forall t < \lambda$