Pauta Aux N°3

P1|

a) $\mathbb{P}(A) = 1/3$, tengo 1 caso favorable dentro de 3 casos totales.-

b) Para lo que sigue utilizaremos:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\cdot\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\cdot\mathbb{P}(A^c).$$

i) $\mathbb{P}(B|A) = 1$, $\mathbb{P}(B|A^c) = 0$

$\Rightarrow \mathbb{P}(B) = 1/3$

ii) $\mathbb{P}(B|A) = 0$, $\mathbb{P}(B|A^c) = 1$

$\Rightarrow \mathbb{P}(B) = 2/3$, $(\mathbb{P}(A^c) = 2/3)$

iii) $\mathbb{P}(B|A) = 1/2$, $\mathbb{P}(B|A^c) = 1/2$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = 1/2.$$

P2|

a) $\# C.T = n^2$, pues para el 1ro tengo n opciones y para el 2do también, pues es con reposición.-

$\# C.F = n$, pues tengo solo n pares (x,y) tq: $x=y$.

$$\Rightarrow \mathbb{P}(x=y) = 1/n$$

b) $$\mathbb{P}(x \in B) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(x \in B \,/\, |B| = i) \cdot \mathbb{P}(|B| = i)$$

calculamos:

1) $$\mathbb{P}(x \in B \,/\, |B| = i) = \frac{i}{n}$$

2) $$\mathbb{P}(|B| = i) = \frac{\binom{n}{i}}{2^n}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(x \in B) = \frac{1}{n 2^n} \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot i$$

$$= \frac{1}{n 2^n} \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left.\frac{dy^i}{dy}\right|_{y=1}$$

$$= \frac{1}{n 2^n} \frac{d}{dy} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} y^i \cdot 1^{n-i} \Big|_{y=1}$$

$$= \frac{1}{n 2^n} \frac{d}{dy} \left[(1+y)^n \right] \Big|_{y=1}$$

$$= \frac{1}{n \cdot 2^n} n (1+1)^{n-1} = \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1/2 \,//$$

P3|

$A =$ "tener la enfermedad".
$B_+ =$ "examen da positivo"
$B_- =$ "examen da negativo"

- $\mathbb{P}(A) = 1/1000$
- $\mathbb{P}(B_+ | A) = 99/100$
- $\mathbb{P}(B_- | A^c) = 99/100$

Nos preguntan por ejemplo:

$$\mathbb{P}(A | B_+) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B_+)}{\mathbb{P}(B_+)} = \frac{\mathbb{P}(B_+|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B_+)}.$$

Luego basta calcular $\mathbb{P}(B_+)$:

$$\mathbb{P}(B_+) = \mathbb{P}(B_+ | A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B_+ | A^c) \cdot \mathbb{P}(A^c)$$

$$= \mathbb{P}(B_+ | A) \cdot \mathbb{P}(A) + (1 - \mathbb{P}(B_- | A^c)) \cdot \mathbb{P}(A^c)$$

$$= \frac{99}{100} \cdot \frac{1}{1000} + \left(1 - \frac{99}{100}\right) \cdot \frac{999}{1000}$$

$$\approx 1098/100.000$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A | B_+) = \frac{\frac{99}{100} \cdot \cancel{\frac{1}{1000}}}{\frac{1098}{\cancel{100.000}}} = \frac{99}{1098} \approx 0{,}09.$$

P4) Para que dos eventos sean independientes es necesario que:

$$\mathbb{P}(C_1, C_2) = \mathbb{P}(C_1) \cdot \mathbb{P}(C_2).$$

- Calculemos por separado cada una de estas probabilidades:

$$\rightarrow \mathbb{P}(C_1) = \mathbb{P}(C_1 | \underbrace{\text{escojo moneda no cargada}}_{A}) \cdot \mathbb{P}(A)$$

$$+ \mathbb{P}(C_1 | \underbrace{\text{escojo moneda cargada}}_{B}) \cdot \mathbb{P}(B)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$$

$$\rightarrow \mathbb{P}(C_2) = \mathbb{P}(C_2 | A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C_2 | B) \cdot \mathbb{P}(B) = 7/12.$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(C_1) \cdot \mathbb{P}(C_2) = 49/144 //.$$

- $$\mathbb{P}(C_1, C_2) = \underbrace{\mathbb{P}(C_1, C_2 | A)} \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C_1, C_2 | B) \cdot \mathbb{P}(B)$$

$$= \mathbb{P}(C_1 | A) \cdot \mathbb{P}(C_2 | A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C_1 | B) \cdot \mathbb{P}(C_2 | B) \cdot \mathbb{P}(B)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{25}{72} = \frac{50}{144}.$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(C_1, C_2) \neq \mathbb{P}(C_1) \cdot \mathbb{P}(C_2).$$

P5|

a) * Los valores que puede tomar X están dados por el siguiente conjunto:

$$\{r, r+1, \ldots\}.$$

pues para obtener r caras es necesario, por lo menos, hacer r lanzamientos.

* buscamos $p_X(n) = \mathbb{P}(X=n)$

que $X=n$ significa que justo en el n-ésimo lanzamiento se obtiene la r-ésima cara y en los $(n-1)$ lanzamientos anteriores se reparten las $r-1$ caras restantes, luego:

$$\mathbb{P}(X=n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$$

b) buscamos $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=r}^{r+(m-1)} \{X=k\}\right)$

$$= \sum_{k=r}^{r+(m-1)} \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$$

P6|

a) debemos encontrar c.

$$\sum_{i=0}^{+\infty} p_X(i) = 1 \iff c\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = 1$$

$$\iff c\, e^{\lambda} = 1$$

$$\Rightarrow c = e^{-\lambda}$$

- $P(X=0) = p_X(0) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$.

- $P(X>2) = 1 - P(X \leq 2)$

$$= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$$

$$= 1 - e^{-\lambda} - e^{-\lambda}\lambda - e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!}$$

b) debemos demostrar que:

$$P(Y=k) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}$$

- $P(Y=k) = P(X_1+X_2=k)$

Probas. totales $\rightarrow$ $= \displaystyle\sum_{i=0}^{k} P(X_1+X_2=k \mid X_2=i) \cdot P(X_2=i)$

indp. $\rightarrow$ $= \displaystyle\sum_{i=0}^{k} P(X_1=k-i) \cdot P(X_2=i)$

$$= \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda_1} \frac{\cdot \lambda_1^{(k-i)}}{(k-i)!} \cdot e^{-\lambda_2} \frac{\cdot \lambda_2^{i}}{i!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \underbrace{\frac{k!}{(k-i)!\,i!}}_{\binom{k}{i}} \cdot \lambda_1^{(k-i)} \lambda_2^{i}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \cdot (\lambda_1+\lambda_2)^k.$$