

P1

(a) Este problema es equivalente a repartir k bolitas ~~indistinguibles~~ indistinguibles en m cajas distinguibles

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} X_1 + \dots + X_m &= k & X_i &:= \text{cantidad de bolitas en la caja } i \\ X_i &\geq 0 & & \text{(pueden que haya cajas sin bolitas)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \# \text{ FORMAS} = \binom{m+k-1}{m-1}$$

Ahora si quiero que todos tengan al menos 1 notebook

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y_1 + \dots + Y_m &= k & \Leftrightarrow & & X_1 + \dots + X_m &= \text{~~k~~ } k-m \\ Y_i &\geq 1 & X_i &= Y_i - 1 & X_i &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \# \text{ FORMAS} = \binom{m+k-m-1}{m-1} = \binom{k-1}{m-1}$$

ESTO EQUIVALE A

$\underbrace{0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0}_{\substack{k \text{ BOLITAS} \\ k-1 \text{ ESPACIOS}}} \rightsquigarrow \overbrace{0 \ 0 \ 0 \ | \ 0 \ 0 \ | \ \dots \ 0 \ | \ 0}^{m-1 \text{ (SON } m \text{ PERSONAS)}}$

Y QUIERO ELEGIR $m-1$ ESPACIOS

(b) Veamos el caso $\mathbb{Z}^2$. Notemos que para ir de $(0,0)$ a (m,m) necesitamos caminar m derechos y m ~~arriba~~ arriba. De un total de $2m$ posibilidades

∴ Elijo m derechos

$$\binom{2m}{m}$$

y de las restantes posiciones $2m-m$ elijo las otras m .

$$\leadsto \binom{2m-m}{m} = \binom{m}{m} = 1$$

$$\Rightarrow \# \text{CAMINOS ÓPTIMOS} = \binom{2m}{m}$$

Esto también se puede ver como la cantidad $\#$ de palabras de largo $2m$ con m ceros y m unos.

$$\Rightarrow \# \text{FORMAS} = \binom{2m}{m, m} = \frac{2m!}{m!m!} = \binom{2m}{m}$$

El caso $\mathbb{Z}^p$ basta notar que debemos sumar una cantidad de $\sum_{i=1}^p a_i$ opciones, y hay que elegir a_1 de una, a_2 de otra, a_3 de otra,

$$\Rightarrow \# \text{FORMAS} = \binom{\sum_{i=1}^p a_i}{a_1, a_2, \dots, a_p} = \frac{(\sum_{i=1}^p a_i)!}{a_1! a_2! \dots a_p!}$$

Equivale a elegir primero a_1 opciones del total $\sum_{i=1}^p a_i$

$$\leadsto \binom{\sum_{i=1}^p a_i}{a_1} = \frac{(\sum_{i=1}^p a_i)!}{a_1! (\sum_{i=2}^p a_i)!}$$

De lo que resta elijo a_2

$$\leadsto \binom{\sum_{i=1}^p a_i - a_1}{a_2} = \frac{(\sum_{i=2}^p a_i)!}{a_2! (\sum_{i=3}^p a_i)!}$$

y así sucesivamente

$$\Rightarrow \# \text{ FORMAS} = \binom{\sum_{i=1}^p a_i}{a_1} \binom{\sum_{i=2}^p a_i}{a_2} \dots \binom{a_p}{a_p}$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^p a_i\right)!}{a_1! \left(\sum_{i=2}^p a_i\right)!} \frac{\left(\sum_{i=2}^p a_i\right)!}{a_2! \left(\sum_{i=3}^p a_i\right)!} \dots 1$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^p a_i\right)!}{a_1! a_2! \dots a_p!}$$

(c) LA FORMA FÁCIL a definir

$A_5 = \{ \text{MÚLTIPLOS de } 5 \}$

$$|A_5| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200$$

$A_6 = \{ \text{" " " } 6 \}$

$$|A_6| = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166$$

$A_8 = \{ \text{" " " } 8 \}$

$$|A_8| = \left\lfloor \frac{1000}{8} \right\rfloor = 125$$

enteros de 1 a 1000 que
no tienen divisores a
5 ni a 6 ni a 8

NÚMEROS
DE ENTEROS TOTALES

$$= 1000 - |A_5| - |A_6| - |A_8|$$

LE SAQO LOS MÚLTIPLOS DE 5, 6, 8

$$+ |A_5 \cap A_6| + |A_5 \cap A_8| + |A_6 \cap A_8|$$

Antes se descontó 2 veces el
30 por ejemplo, entonces hay
que sumarlo uno. Son los ~~reales~~
múltiplos comunes.

$$- |A_5 \cap A_6 \cap A_8|$$

Faltaba por descontar los múltiplos
de los 3 a la vez.

Por ejemplo 30 es múltiplo de 5 y 6.

está en $|A_5|$ y en $|A_6|$

$\Rightarrow$ está contando 2 veces

$\Rightarrow$ hay que sumarlo una vez

en $|A_5 \cap A_6|$

Por ejemplo 240 es múltiplo de 5, 6 y 8.

$\Rightarrow$ está en $|A_5|$, $|A_6|$, $|A_8|$

pero también está en $|A_5 \cap A_6|$, $|A_6 \cap A_8|$

y $|A_5 \cap A_8|$. Entonces se descartó todo

$\Rightarrow$ Hay que restarlo de nuevo en $|A_5 \cap A_6 \cap A_8|$

$$|A_5 \cap A_6| = \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor = 33$$

$$|A_5 \cap A_8| = \left\lfloor \frac{1000}{40} \right\rfloor = 25$$

$$|A_6 \cap A_8| = \left\lfloor \frac{1000}{24} \right\rfloor = 41$$

$$|A_5 \cap A_6 \cap A_8| = \left\lfloor \frac{1000}{120} \right\rfloor = 8$$

$$\Rightarrow \# \text{ números} = \boxed{600}$$

(d)

- (i) Primero puedo hacer que no vayan los dos.
entonces de 6 amigos elijo 5.
↳ Lo deajo fuera.

$$\Rightarrow \binom{6}{5}$$

Puede ir uno, entonces de 6 (ya que no
puedo elegir al otro) elijo 4.

$$\Rightarrow \binom{6}{4}$$

Para el otro es análogo

$$\Rightarrow \binom{6}{4}$$

$$\# \text{ FORMAS} = \binom{6}{5} + \binom{6}{4} + \binom{6}{4}$$

- (ii) Puedo hacer que vayan los dos

$$\Rightarrow \binom{6}{3} \leftarrow \text{Elijo los 3 que faltan (para 5)} \\ \text{dentro de un total de 6 amigos} \\ \text{(dejo fuera a los 2 que} \\ \text{elijo)}$$

Puedo hacer que no vaya ninguno

$$\Rightarrow \binom{6}{5}$$

$$\# \text{ FORMAS} = \binom{6}{5} + \binom{6}{3}$$

(e) Primero escojo j personas de un total de n .

$\binom{n}{j}$ y de esas j elijo a i individuos
 $\binom{j}{i}$

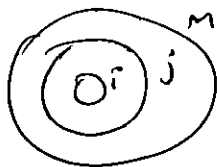
$$\Rightarrow \binom{n}{j} \cdot \binom{j}{i} = \text{COMITÉS Y SUBCOMITÉS}$$

Por otro lado puedo descartar. De un total de n descarto $n-i$ personas que no serán del subcomité. $\binom{n}{n-i}$ y de las $n-i$ vuelvo a descartar (o sea, ~~para~~ escojo para comité)

$$n-j \text{ personas} \quad \binom{n-i}{n-j}$$

$$\Rightarrow \binom{n}{n-i} \binom{n-i}{n-j}$$

Pensar con el siguiente dibujo



$$\therefore \binom{n}{j} \binom{j}{i} = \binom{n}{n-i} \binom{n-i}{n-j}$$

P2

R: random regular

E: " exhaustive

D: Decubren

ND: No decubren

$$\Rightarrow P(R) = \frac{3}{4} \quad P(E) = \frac{1}{4}$$

$$P(D|E) = \frac{1}{2}$$

$$P(D|R) = \frac{1}{10}$$

$$\rightarrow P(ND|R) = \frac{9}{10}$$

$$\rightarrow P(ND|E) = \frac{1}{2}$$

(a) Me piden $P(ND) = ?$

Recordar que si tengo una partición $\{B_i\}_{i=1}^n$ de Ω ,
es decir, $\forall i: B_i \in \mathcal{F}$, $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$, $\forall i, j: B_i \cap B_j = \emptyset$.

Probabilidades Totales nos dice que $\forall A \in \mathcal{F}$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

Como R y E es partición

$$P(ND) = P(ND|R) \cdot P(R) + P(ND|E) \cdot P(E)$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{40} + \frac{1}{8} = \frac{27}{40} + \frac{5}{40} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$$

(b) Nos piden $P(R|ND)$

BAYES

$$P(R|ND) = \frac{P(ND|R) \cdot P(R)}{P(ND)} = \frac{\frac{9}{10} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{4}{5}} = \frac{27}{32}$$

P3 (a) G_i son disjuntas ($G_i \cap G_j = \emptyset$) ya que no puedo ganar en dos máquinas a la vez.

$i=1$

$$P(G_1) = p.$$

DADO QUE NO GANÉ EN 1
→ que gane en 2

$i=2$

$$\begin{aligned} P(G_2) &= P(G_2 | G_1^c) \cdot P(G_1^c) \\ &= p \cdot (1-p) \end{aligned}$$

$i=3$

$$\begin{aligned} P(G_3) &= P(G_3 | G_1^c \cap G_2^c) \cdot P(G_2^c | G_1^c) \cdot P(G_1^c) \\ &= p \cdot (1-p) \cdot (1-p) \\ &= p(1-p)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad P(\text{NO GANAR}) &= P(G_3^c | G_2^c \cap G_1^c) \cdot P(G_2^c | G_1^c) \cdot P(G_1^c) \\ &= (1-p) \cdot (1-p) \cdot (1-p) \\ &= (1-p)^3 \end{aligned}$$

↓ OTRA FORMA

$$= 1 - P(\text{GANAR EN ALGUNA MÁQUINA})$$

$$= 1 - (\overset{\text{GANAR EN}}{P(G_1)} + P(G_2) + P(G_3))$$

$$= 1 - (p + p(1-p) + p(1-p)^2) = (1-p)^3$$

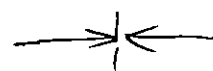
(c) Veamos el caso G_1 y G_2 (el resto es análogo).
Si fueran independientes.

se tendría que (Asumamos $0 < p < 1$)

$$P(G_1 \cap G_2) = P(G_1) \cdot P(G_2) = p \cdot p(1-p) > 0$$

$$\parallel$$

$$P(\emptyset)$$



$$\parallel$$

$$0$$

$\therefore G_1$ y G_2 no son independientes.

(d) G : TATÁN GANÓ.

$$P(G_i | G) = ?$$

$$G_i \subseteq G$$

$$P(G_i | G) = \frac{P(G_i \cap G)}{P(G)} = \frac{P(G_i)}{\sum_{i=1}^3 P(G_i)}$$

$\nearrow$
 $\searrow$ GANÓ en 1, 2 o 3.

$$= \frac{p(1-p)^{i-1}}{p(1-p)^2 + p(1-p) + p}$$

(e) G : ganador premio

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$$

G_i : ganar en i

$$P(G) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i\right) \stackrel{\text{DISJUNTOS}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(G_i) \stackrel{(a)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} p(1-p)^{i-1}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{CORRÍ} \\ \text{ÍNDICES}}}{=} p \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1. \\ &\quad \quad \quad \uparrow \text{GEOMÉTRICA} \\ &\quad \quad \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad \forall |x| < 1 \end{aligned}$$