Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
05 de Abril de 2012

Auxiliar 3 MA3403 3

Profesor: Roberto Cortez M..
Auxiliares:Francisco Castro A., Alfredo Torrico P.

Problemas

P1. El problema de Monty Hall: En un programa de televisión el animador muestra 3 puertas a un concursante. Detrás de una de ellas hay u premio (auto) y detrás de las otras dos, una cabra. El auto podría estar en cualquiera de ellas de manera equiprobable. El concursante escoge una de las 3 puertas para descubrir que hay detrás de ella. El animador, que sabe en que puerta está el auto, abre una de las puertas en donde hay una cabra y ofrece al concursante cambiar de puerta o mantenerse en la puerta en que estaba.

a) Sea el evento A:*escoger la puerta ganadora en la primera elección*(cuando estan las 3 puertas cerradas). Calcular $\mathbb{P}(A)$.

b) Sea B:*escoger la puerta ganadora, después de que el animador abre una puerta.* El concursante puede usar distintas estrategias para resolver la situación.

   i) Si la estrategia es NO cambiar de puerta, calcular: $\mathbb{P}(B|A), \mathbb{P}(B|A^c)$ y $\mathbb{P}(B)$.

   ii) Si la estrategia es SIEMPRE cambiar de puerta, calcular: $\mathbb{P}(B|A), \mathbb{P}(B|A^c)$ y $\mathbb{P}(B)$.

   iii) Si la estrategia es escoger al azar una de las 2 puertas que aún no se abren, calcular: $\mathbb{P}(B|A), \mathbb{P}(B|A^c)$ y $\mathbb{P}(B)$.

P2. Probabilidades condicionales y Totales: Sea $A = \{1, ..., n\}$.

(a) Se eligen con reposición, independientemente y con ley equiprobable, dos puntos x e y de A. Calcular la probabilidad de que $x = y$.

(b) Se eligen un subconjunto B de A y un punto x de A, con reposición, de manera independiente y equiprobable, es decir, la elección de x es con ley equiprobable en A y la elección de B es con ley equiprobable en $\mathcal{P}(A)$ (cada subconjunto de A, incluyendo el conjunto vacío, tiene la misma probabilidad de ser escogido en $\mathcal{P}(A)$). Calcule la probabilidad de que $x \in B$.

Recuerde que $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.
Hint: En b) puede serle util condicionar con respecto a la cardinalidad de B.

P3. Detectar una enfermedad infrecuente: Una muy extraña enfermedad ha comenzado a propagarse en la ciudad de Mixtor. Un grupo de entendidos en este tipo de fenómenos a detectado que la enfermedad afecta a una de cada mil personas. Por otro lado un grupo de biólogos de la universidad Chipa-Mogli a desarrollado un examen a través del cual es posible detectar la enfermedad, además numerosas pruebas han arrojado que este examen tiene un 99% de efectividad. Usted como estudiante de ingenieria de Uchile tiene sus dudas respecto a la confiabilidad de este examen y dedice aplicar sus conocimientos para dilucidar si efectivamente este examen es confiable o no.

P4. Se dispone de dos monedas, una equilibrada y la otra con probabilidad $2/3$ de cara. Se escoge al azar una de las dos monedas, y se lanza dos veces. Sea C_i el evento en que el lanzamiento i resulta cara, para $i = 1, 2$. ¿Son independientes los eventos C_1 y C_2?. Explique.

Variables aleatorias discretas

P5. **(a)** Suponga que se realizan lanzamientos independientes una moneda, la cual tiene probabilidad de cara igual a $0 < p < 1$, hasta que se obtiene un total de r caras. Sea X el número de lanzamientos realizados. Determine el rango de X y su función de distribución.

(b) Para la misma situación que en a), ¿Cuál es la probabilidad de tener r carar antes de m sellos?

P6. **(a)** La función de masa de la distribución de una variable aleatoria discreta X esta dada por $p_X(i) = c\frac{\lambda^i}{i!}, i = 0, 1, 2, \ldots.$ Donde $\lambda > 0$ conocido y c desconocido. Encuentre $\mathbb{P}(X = 0)$ y $\mathbb{P}(X > 2)$.

(b) Una variable aleatoria X distribuye como Poisson de parámetro λ si su función de masa de distribución es $p_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \ldots$. Sean X_1, X_2 v.a Poisson independientes de parámetro λ_1, λ_2 respectivamente, demuestre que $Y = X_1 + X_2$ distribuye como una v.a Poisson de parametreo $\lambda_1 + \lambda_2$. ¿Puede extender este resultado?