P1)

a) Por contradicción supongamos que: $\mathbb{P}(A) \neq \mathbb{P}(B)$. sin perdida de generalidad podemos suponer además que $\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(B)$. Luego:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\underset{\text{pues } \mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A \cap B)}{\Longleftrightarrow} \quad 2\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

$\mathbb{P}(B) < \mathbb{P}(A)$

$$\Rightarrow \quad 2\mathbb{P}(A \cup B) < 2\mathbb{P}(A)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(A \cup B) < \mathbb{P}(A) \longrightarrow \times \longleftarrow \blacksquare$$

(pues $A \subseteq A \cup B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A \cup B)$)

b) tenemos que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

$\mathbb{P}(A_i) = 1 \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}\ \mathbb{P}(A_i^c) = 0$

y además: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i^c) = 0$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right]^c\right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 \quad \blacksquare$$

P2|

a) Por contradicción supongamos que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $\mathbb{P}(B_i) > 1/n$.
Luego:

$$1 = \mathbb{P}\Big(\underbrace{\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} B_i}_{\Omega}\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) > \sum_{i=1}^{n} 1/n = 1 \quad \rightarrow\leftarrow$$

b) i) Si $\mathbb{P}(\{x\}) \neq 0$ $(\mathbb{P}(\{x\}) > 0)$ entonces como $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es no atómico:

$$\exists A \subseteq \Omega, \ A \subseteq \{x\} : 0 < \mathbb{P}(A) \wedge \mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(\{x\})$$

Como $0 < \mathbb{P}(A)$, A no puede ser $\emptyset$.

$\Rightarrow A = \{x\}$ pues $A \subseteq \{x\}$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathbb{P}(\{x\})}_{A} < \mathbb{P}(\{x\}) \quad \rightarrow\leftarrow$$

ii) Si $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ fuese no atómico entonces por (i) $\forall x \in \Omega$ $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$.
pero

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\Big(\underbrace{\overbrace{\bigcup_{x \in \Omega} \{x\}}^{\text{unión numerable}}}_{=\,\Omega}\Big) \underset{\sigma\text{-subaditividad}}{\leq} \sum_{x \in \Omega} \underbrace{\mathbb{P}(\{x\})}_{0} = 0 \quad \rightarrow\leftarrow$$

P3)

* permutaciones: se distingue a los elementos.

(1) $\frac{n!}{(n-k)!}$ = # de formas en que podemos ordenar k elementos de un total de n elementos distinguibles.

* combinaciones: no se distingue entre los elementos, por ejemplo:

Ej: por: (1, 2) es lo mismo que el por (2, 1). Es decir, se cuenta una sola vez:

(2) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ = # subconjuntos de tamaño k de un total de n elementos distintos:

Veamos de donde viene (2): sabemos que $\frac{n!}{(n-k)!}$ es el # de formas en que podemos ordenar k elementos de un total de n elementos distinguible

Sea x = # subconjuntos de tamaño k de un total de n elementos distintos. Entonces:

Para cada uno de estos subconjuntos de tamaño k, yo puedo realizar ordenamientos. ¿cuántos?: k!

$\therefore \; k! \cdot x = \frac{n!}{(n-k)!} \iff x = \binom{n}{k}$ //

Permutaciones

a) Color: 5 cartas de la misma pinta.

$\underline{\underline{\# C_0T}}$: • $\frac{52!}{(52-5)!} = \frac{52!}{47!}$ todos los posibles ordenamientos que se pueden hacer con 5 cartas.

$\underline{\underline{\# C.F}}$: • La primer carta que me dan puede ser cualquiera, es decir, tengo 52 opciones. Una vez que recibí la primera carta tengo fijo el color por lo que ahora sólo tengo 12 opciones, y para la tercera 11 opciones, etc....

$\therefore \# C.F = 52\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9$

$\Rightarrow P(\text{"color"}) = \dfrac{52\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{\frac{52!}{47!}}$ //.

Combinaciones.

$\underline{\underline{\# CT}}$: • $\binom{52}{5}$ todas las posibles formas de agrupar 5 cartas.

$\underline{\underline{\# C.F}}$: • Hay 4 pintas, por cada una de ellas $\binom{13}{5}$ me dice el #deformas posibles de agrupar 5 cartas de una misma ~~pinta~~ pinta.

$\therefore \# C.F = \underset{\heartsuit}{\binom{13}{5}} + \underset{\diamondsuit}{\binom{13}{5}} + \underset{\clubsuit}{\binom{13}{5}} + \underset{\spadesuit}{\binom{13}{5}} = 4\binom{13}{5}$

$\Rightarrow P(\text{"color"}) = \dfrac{4\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = \dfrac{\frac{4\cdot 13!}{8!\cdot \cancel{5!}}}{\frac{52!}{47!\,\cancel{5!}}} = \dfrac{\overbrace{4\cdot 13}^{52}\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot}{\frac{52!}{47!}}$

b) Un Par : 2 cartas con el mismo número y las otras 3 tienen distinto número entre sí y del resto.-

• <u>Permutaciones</u>.

$\#\,\underline{C.T}$: $\dfrac{52!}{47!}$

$\#\,\underline{C.F}$: $\underset{1}{\_\_}\ \underset{2}{\_\_}\ \underset{3}{\_\_}\ \underset{4}{\_\_}\ \underset{5}{\_\_}$

• Primero escogemos la posición en donde aparecerá el par eso lo podemos hacer de $\binom{5}{2}$ formas.-

• Una vez hecho lo anterior, podemos pensar en que ya tenemos fijo el lugar donde aparecerá el par, por ejemplo:

$\_\_\ \underset{\uparrow}{\_\_}\ \_\_\ \underset{\uparrow}{\_\_}\ \_\_$

• <u>1ra carta</u> : 52 (ya no puede volver a salir una carta con el mismo #)

• <u>2da carta</u> : 48 (es la 1ra carta del par así que tengo 48 opciones)

• <u>3da carta</u> : 44

• <u>4ta carta</u> : 3 (sólo hay 3 opciones pues la ~~tercera~~ 2da carta fijó el color).

• <u>5ta carta</u> : 40

$\therefore\ \underline{\#C.F} = 52\cdot 3\binom{5}{2}\ 48\cdot 44\cdot 40$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\text{"Un par"}) = \frac{52\cdot 3\binom{5}{2}\cdot 48\cdot 44\cdot 40}{\frac{52!}{47!}}$$

• Combinaciones:

$\#$ C.I : $\binom{52}{5}$

$\#$ C.F : De un total de 13 monos tengo que elegir ~~[illegible]~~ uno para armar el par. Al elegirlo tengo $\binom{4}{2}$ opciones, pues ~~[illegible]~~ por cada mono hay 4 cartas. Entonces

$13 \cdot \binom{4}{2}$ es el # de formas en que puedo escoger un par.

Ahora para las tres cartas restantes tengo 12 monos disponibles. Entonces

$\binom{12}{3}$

me dice el número de formas en que puedo sacar 3 monos distintos, pero esto no ~~[illegible]~~ considera la pinta.

Una vez escogidos los 3 monos distintos, por cada uno de ellos tengo 4 opciones de elegirlos.

$$\therefore \; \#\text{C.F} = 13 \cdot \binom{4}{2}\binom{12}{3} \cdot 4^3$$

$$\rightarrow P(\text{"un par"}) = \frac{13\binom{4}{2}\binom{12}{3} \cdot 4^3}{\binom{52}{5}}$$

//

b) Dos pares:

Permutaciones:

$\#C.T$: $\frac{52!}{47!}$

$\#C.F$: • Elegimos las 4 posiciones en donde aparecerán los pares: $\binom{5}{4}$.

• Podemos pensar en que tenemos fijo el lugar donde aparecerán los pares:

$$\_ \quad \underset{\uparrow}{\_} \quad \underset{\uparrow}{\_} \quad \underset{\uparrow}{\_} \quad \underset{\uparrow}{\_}$$

• 1ra carta: 52 formas.
• 2da carta: 48 formas.
• 3ra carta: 44 "
• 4ta carta: 3 "
• 5ta carta: 3 ".

$\therefore$ $\#C.F$: $52 \cdot 48 \cdot 44 \cdot \binom{5}{4} \cdot 3^2$

$$\Rightarrow P(\text{"Dos pares"}) = \frac{52 \cdot 48 \cdot 44 \binom{5}{4} \cdot 3^2}{\frac{52!}{47!}}$$

Combinaciones:

$\#C.T$: $\binom{52}{5}$.

$\#C.F$: • De un total de 13 monos elegimos 2 que serán los pares: $\binom{13}{2}$ formas de hacer esto. Por cada par hay $\binom{4}{2}$ formas de armarlo. Para la carta restante tengo 11 monos disponibles: $\binom{11}{1}$ formas de escogerlo y hay que elegir una pinta: $\binom{4}{1}$ formas.

$$\#C.F = \binom{13}{2}\binom{4}{2}^2\binom{11}{1}\binom{4}{1}$$

$$\Rightarrow P(\text{"2 pares"}) = \frac{\binom{13}{2}\binom{4}{2}^2\binom{11}{1}\binom{4}{1}}{\frac{52!}{47!}}$$

d) Trío:

Permutaciones: ~~Fijamos los po~~

$\# C.T = \dfrac{52!}{47!}$

$\# C.F =$ · fijamos las posiciones en donde aparecerá el trío $\binom{5}{3}$.

$\overset{\uparrow}{\_}\ \_\ \overset{\uparrow}{\_}\ \_\ \overset{\uparrow}{\_}$

- 1ra carta: 52
- 2da " : 48
- 3ra " : 3
- 4ta " : 44
- 5ta " : 2

$\therefore \# C.F = 52 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 48 \cdot 44$.

$\Rightarrow P(\text{"trío"}) = \dfrac{52 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 48 \cdot 44}{\frac{52!}{47!}}$

Combinaciones:

$\# C.T : \binom{52}{5}$

$\# C.F$: Podemos elegir un mono de un total de 13, al elegirlo podemos armar un trío de $\binom{4}{3}$ formas. (considerando sólo las 4 cartas de este mono).
Luego para las dos cartas restantes de un total de 12 monos debo escoger: $\binom{12}{2}$ y cada mono lo puedo escoger de 4 formas distintas (1 por cada pinta):

$\therefore \# C.F = 13 \cdot \binom{4}{3}\binom{12}{2} \cdot 4^2$

$\Rightarrow P(\text{"trío"}) = \dfrac{13\binom{4}{3}\binom{12}{2} \cdot 4^2}{\binom{52}{5}}$ //

e) Póker:

Permutaciones:

$$\# C.T = \frac{52!}{47!}$$

C.F = • fijamos el lugar donde saldrán los 4 cartas iguales

$\binom{5}{4}$ formas: $\underset{\uparrow}{\_}\ \underset{\uparrow}{\_}\ \_\ \underset{\uparrow}{\_}\ \underset{\uparrow}{\_}$

- 1ra carta = 52
- 2da " = 3
- 3ra " = 48
- 4ta " = 2
- 5ta " = 1

$$\therefore \# C.F = 52 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 48 \cdot \binom{5}{4}$$

$$\Rightarrow P(\text{"Póker"}) = \frac{52 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 48 \cdot \binom{5}{4}}{\frac{52!}{47!}}$$

Combinaciones:

$$\# C.T = \binom{52}{5}$$

C.F = Hay que escoger dentro de un total de 13 monos uno. Luego me queda una sola carta, la cual dentro de un total de 12 monos la puedo escoger (por cada uno) de 4 formas distintas:

$$\# C.F = 13 \cdot 12 \cdot 4$$

$$\Rightarrow P(\text{"Póker"}) = \frac{13 \cdot 12 \cdot 4}{\binom{52}{5}} \quad //$$

P4

a) Llamemos a las parejas:

$$\underbrace{A_1 A_2}_{A}, \quad \underbrace{B_1 B_2}_{B}, \quad \underbrace{C_1 C_2}_{C}$$

- 1ro: Hay 3! formas de sentar a las parejas juntas, sin distinguir el orden entre ellos. Esto lo podemos pensar como el total de palabras que puedo formar con las letras A, B, C.
- 2do: Por cada ordenamiento de las parejas (o por cada palabra), existe 2^3 formas de sentarlas, ya que se puede intercambiar la posición de el hombre y la mujer.

$$\Rightarrow \quad 3! \cdot 2^3$$

b) Sea E_i = "la pareja i se sienta junta" $i \in \{1,2,3\}$

debemos calcular:

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(E_i) - \sum_{\substack{i<j \\ j\leq 3}} \mathbb{P}(E_i \cap E_j) + \mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

- $\mathbb{P}(E_i) = \dfrac{5! \cdot 2}{6!}$

$$\underbrace{\overline{C_1} \quad \overline{A} \quad \overline{C_2} \quad \overline{B_1} \quad \overline{B_2}}$$

Hay 5! formas de ordenar esto, y por cada una de ellas 2.

- $\mathbb{P}(E_i \cap E_j) = \dfrac{4!\, 2^2}{6!}, \quad i \neq j$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \frac{3 \cdot 5!\, 2}{6!} - \frac{3 \cdot 4!\, 2^2}{6!} + \frac{3!\, 2^3}{6!} = 2/3$$

P5| Si tenemos k tipos de elementos, y dentro de cada uno de estos k tipos tenemos n_i elementos de este tipo $i \in \{1, \dots, k\}$. (los n_i elementos indistinguibles entre sí).
Entonces:

$$\frac{(n_1 + \dots + n_k)}{n_1! \cdots n_k!}$$

nos dice # de arreglos de tamaño $(n_1 + \dots + n_k)$ que puedo formar utilizando estos elementos.

Por ejemplo:
- $k = 2$
- $n_1 = 2$
- $n_2 = 1$

Pensemos en:
tipo 1: "A"
tipo 2: "B"

se pueden formar los sgtes arreglos:

AAB
ABA
BAA

$$\frac{(2+1)!}{2!\,1!} = \frac{3!}{2!} = 3$$

a) Si la partícula da p pasos hacia la derecha y q hacia arriba, entonces $p+q$ es el número total de pasos que puede dar la partícula. Por lo tanto, para llegar a (p,q) la partícula debe dar exactamente $p+q$ pasos.
Luego:
- si $p+q \neq n \rightarrow \mathbb{P}(\text{"terminar en } (p,q)\text{"}) = 0$

$\longrightarrow$

• Si $p+q=n$. Podemos imaginar el problema en contar todas las palabras o tuplas de tamaño n que puedo formar con $n_1 = p$ letras "D" (derecha) y con $n_2 = q$ letras "A" (arriba). Luego:

$$\underline{\# C.T}: \quad (\overbrace{\underset{2}{\_}, \underset{\cdot}{\ }\underset{2}{\_}, \underset{\cdot}{\ } \dots, \underset{\cdot}{\ }\underset{2}{\_}}^{n \text{ casilleros}})$$

en cada casillero puedo poner "A" o "D". ∴

$$\# C.T = 2^n$$

$\underline{\# C.F}$: Tenemos $k=2$ tipos de elementos distintos, y para cada uno de estos tipos hay $n_1 = p$ "D" y $n_2 = q$ "A".

$$\therefore \quad \underline{\# C.F}: \quad \frac{(p+q)!}{p!\cdot q!} = \binom{p+q}{p}$$

$$\therefore \mathbb{P}(\text{"terminar en } (p,q)\text{"}) = \binom{p+q}{p} \cdot 2^{-n}$$

b)

$\underline{\# C.T}$: igual que antes es: 2^n.

$\underline{\# C.F}$: Primero consideramos las primeras $(i+j)$ componentes del arreglo. Desde $(0,0)$ puedo llegar al punto (i,j) de:

$$\frac{(i+j)!}{i!\,j!} = \binom{i+j}{i} \text{ formas.}$$

Una vez en el punto (i,j) puedo llegar al punto (p,q) de:

$$\binom{n-(i+j)}{p-i} = \left\{ \frac{(n-(i+j))!}{(p-i)!\,(q-i)!} \right. \text{ formas}$$

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ la probabilidad pedida es:

$$\binom{i+j}{i}\binom{n-i-j}{p-i}\cdot 2^{-n}$$

//

c) Ahora sabemos que la partícula pasa por (i,j), $i+j<n$, $p+q=n$.

sea A = llega a (p,q)

B = la partícula pasa por (i,j)

Entonces nos piden calcular:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\binom{i+j}{i}\binom{n-i-j}{p-i}\cdot 2^{-n}}{\binom{i+j}{i}\cdot 2^{-(i+j)}}$$

$\rightarrow$ lo sacamos de b)

$\rightarrow$ se calcula como en a)

$$\therefore\ \mathbb{P}(A|B) = \binom{n-i-j}{p-i}\cdot 2^{-(n-i-j)}$$

//

<u>obs</u>: "también se podría haber sin usar probas condicionales".