

Auxiliar 1 MA3403 3

Profesor: Roberto Cortez M..
 Auxiliares: Francisco Castro A., Alfredo Torrico P.

Problemas

P1. (a) Sean A y B dos sucesos. Pruebe que

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap B) \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B).$$

(b) Sean $\{A_i\}_{i=1}^n$ una colección de sucesos relativos a un espacio muestral Ω , tales que $\mathbb{P}(A_i) = 1, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Pruebe que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = 1.$$

P2. (a) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Considere $\{B_i : i = 1, \dots, n\}$ una partición medible de Ω , es decir,

- $B_i \in \mathcal{F}, \forall i = 1, \dots, n$.
- $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$.
- $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$.

Pruebe que existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\mathbb{P}(B_i) \leq \frac{1}{n}$.

(b) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Este se dice no atómico si $\forall B \subseteq \Omega$, con $\mathbb{P}(B) > 0$, $\exists A \subseteq \Omega, A \subseteq B$ tal que $0 < \mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(B)$.

- i) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio no atómico y $x \in \Omega$. Muestre que $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$.
- ii) Muestre que si Ω es numerable entonces $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ no puede ser no atómico.

P3. Una mano de póker consta de 5 cartas escogidas al azar de un total de 52 que posee el mazo inglés. El joven Mixtor es un ferviente jugador de póker y está interesado en calcular la probabilidad de obtener:

- (a) **Color:** Las 5 cartas son de la misma pinta.
- (b) **Un par:** Dos cartas tienen el mismo número entre sí, y las tres restantes tienen números distintos al resto y entre sí.
- (c) **Dos pares:** Dos cartas tienen el mismo número entre sí, otras dos poseen el mismo número entre sí, pero distinto al anterior, y la última tiene un número distinto al resto.
- (d) **Un trío:** La misma lógica que un par.
- (e) **Póker:** Cuatro cartas tienen el mismo número.

P4. Tres parejas digamos A, B y C , se sientan en una fila. Suponga que todos los ordenamientos son igualmente probables.

- (a) Pruebe que hay $2^3 3!$ ordenamientos distintos tales que todos los esposos queden sentados junto a sus respectivas esposas.
- (b) Pruebe que la probabilidad de que algún esposo se siente con su respectiva esposa es $2/3$.
Hint: Utilice el principio inclusión/exclusión.

P5. Una partícula se desplaza aleatoriamente por $\mathbb{Z}_+^2 = \{0, 1, \dots\}^2$ partiendo de $(0, 0)$ y dando un total de n pasos unitarios, ya sea hacia arriba o hacia la derecha. Suponga que el espacio muestral es el conjunto de las trayectorias $\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{\text{arriba, derecha}\}, i = 1, \dots, n\}$ y que todas las trayectorias tienen igual probabilidad.

- (a) Calcule la probabilidad de que la partícula termine su recorrido en el punto de coordenadas $(p, q) \in \mathbb{Z}_+^2$
- (b) Sean $p, q \in \mathbb{Z}_+$ tales que $p + q = n$. Calcule la probabilidad de que la partícula termine en (p, q) y que pase por el punto $(i, j) \in \mathbb{Z}_+^2$, tal que $i + j \leq n$.
- (c) Sabiendo que la partícula pasa por (i, j) , $i + j < n$, calcule la probabilidad de que llegue a (p, q) , $p + q = n$.