Auxiliar 2: Probabilidades y Estadística

Profesor: Servet Martinez
Auxiliares: Gonzalo Contador, Amitai Linker
30 de marzo de 2012

P1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eventos medibles. Pruebe que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

P2. Un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se dice no atómico si para todo $B \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(B) > 0$ existe $B \in \mathcal{F}, A \subset B$ tal que $0 < \mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(B)$

i) Pruebe que si $x \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$

ii) Pruebe que si Ω es numerable $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ no puede ser no atómico.

P3. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ secuencia de eventos.

i) Pruebe que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, $\mathbb{P}(limsup A_n) = 0$

ii) Pruebe que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ y los $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son independientes, $\mathbb{P}(limsup A_n) = 1$

P4. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap B)$. Pruebe que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$

P5. Considere un espacio muestral equiprobable de cardinalidad 4. Construya conjuntos de cardinal 2 independientes de a pares, pero no independientes.

P6. Una enfermedad venérea es portada por una proporción α de la población. Se construye un test médico que, a una persona portadora le diagnostica la enfermedad con probabilidad β y a una persona no portadora le diagnostica la enfermedad con probabilidad $1 - \beta$

i) Calcule la probabilidad de que un individuo cualquiera sea diagnosticado como portador.

ii) Si una persona es diagnosticada como portador, calcule la probabilidad de que presente la enfermedad.