Universidad de Chile
Facultad De Ciencias Físicas y Matemáticas
Prof.: Raúl Gouet
Prof. Aux.: Francisco Castro, Orlando Rivera
Letelier, Alberto Vera Azócar

Probabilidades y Estadística
Clase Auxiliar 10 - Estimación Puntual

1 de junio de 2012

Problema 1 [Muestreos Aleatorios Simples].- Se tiene una población de N individuos y se quiere realizar un muestreo de una característica. Se pide determinar cual de los siguientes procedimientos garantiza obtener un m.a.s.

(a) Para cada individuo se lanza una moneda, si resulta cara se muestrea la característica de tal individuo, si sale cruz no.

(b) Enumerar a cada individuo y hacer m veces lo siguiente: elegir un número completamente al azar entre 1 y N (se sortea un individuo) luego lanzar una moneda, si sale cara tomar el dato del individuo, si es cruz no.

(c) Considere el mismo experimento de (c), pero ahora cada vez que se sortea un individuo se lanza la moneda hasta que salga cruz y se toma el dato tantas veces como caras salieron.

Nota: Uno de los supuestos más importantes que nos damos al estudiar estadística es que somos capaces de generar muestreos aleatorios simples.

Problema 2 [Modelo Potencia] Considere un m.a.s. $X_1, \cdots, X_n$ de la distribución

$$f(x|\alpha,\theta) = \frac{(\alpha+1)x^\alpha}{\theta^{\alpha+1}}\mathbb{1}_{\{0\leq x\leq\theta\}}$$

(a) Demuestre que el momento de orden k para X es

$$\frac{\alpha+1}{\alpha+k+1}\theta^k$$

(b) Suponga que α es conocido. Demuestre que el estimador $\hat{\theta}$ de θ es consistente, donde:

$$\hat{\theta} = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}\bar{x}$$

(c) Suponga que θ es un parámetro conocido, dé el estimador de máxima verosimilitud de α.

Problema 3 [Producción de Piezas].- Una empresa fabricadora de piezas de construcción tiene de tres tipos: liviana (con peso menor a 0.5) que se vende en 200, pesada (peso mayor a 1.5) que se vende en 100 y las piezas excelentes (peso entre 0.5 y 1.5) que se venden en 300. Hay dos máquinas que fabrican piezas de forma totalmente independiente. La máquina 1 fabrica a la pieza n con un peso $\frac{X}{n}$ donde $X \sim Gamma(n,1)$.
La máquina 2 fabrica todas las piezas con un peso $T \sim \mathcal{U}(0,2)$

(a) Aproxime la probabilidad de que la máquina 1 fabrique a la pieza n de forma excelente.

(b) Estudie si es posible asegurar que el 99 % de las piezas fabricadas por la máquina 1 serán excelentes a partir de algún n.

(c) Considere la máquina 2. ¿Cuántas piezas debe producir la máquina si se quiere que con probabilidad 0.9 la utilidad sea mayor a $40 \cdot 225$?

Indicación: Puede servirle que $\Phi^{-1}(0.005) \approx -2.57$, $\Phi^{-1}(0.1) \approx -1.28$ y que $\sqrt{6875} \approx 82.91$

Problema 4 [Estimación para una Uniforme].- Considere un m.a.s. $X_1, \cdots, X_n$ de una v.a. que se sabe uniforme en $[0, \theta]$, con θ desconocido.

(a) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\theta}_V$ de θ.

(b) Compare $\hat{\theta}_V$ con el "estimador de los momentos"dado por:

$$\hat{\theta}_M = 2\bar{X}$$

(c) Exprese el intervalo de confianza para θ en función de la significación $1 - \alpha$. NO asuma simetría en las colas de las distribuciones.

Problema 5 [Parametrizando Adecuadamente].- Considere la variable aleatoria exponencial, de la que se quiere estimar su parámetro puntualmente. Se cuenta con un m.a.s. $X_1, \cdots, X_n$.

(a) Escriba el modelo paramétrico y obtenga el estimador máximo verosímil que denotaremos por $\hat{\lambda}_1$.

Indicación: Escoja una parametrización tal que $\mathbb{E}(X_1) = \lambda$.

(b) Estudie la consistencia de $\hat{\lambda}_1$.

(c) Estudie el sesgo de los estimadores:

$$\hat{\lambda}_2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i \qquad \hat{\lambda}_3 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

(d) Decimos que el estimador $\hat{\theta}_1$ es más creíble que $\hat{\theta}_2$ si $\hat{\theta}_1$ es insesgado y tiene menor varianza que $\hat{\theta}_2$. ¿Es posible encontrar a partir de $\hat{\lambda}_2$ un estimador más creíble que $\hat{\lambda}_1$?

Nota: La forma en que se escribe la densidad de una v.a. afecta directamente los cálculos, lo que nos dice que modelando adecuadamente es posible tener mejores aproximaciones.