CLASE AUXILIAR 6: VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

Problema 1:*Variable Aleatoria Binomial Negativa*

Supongamos que tenemos una moneda cargada con probabilidad p de salir cara. Consideremos ahora el experimento que consiste en realizar una serie de lanzamientos independientes entre sí. Nos interesa saber cuantos lanzamientos son necesarios para observar r caras. Sea X el número de lanzamientos necesarios.

Pruebe que:

1. $\mathbb{P}(X = n) = \binom{n-1}{r-1} (1-p)^{n-r} p^r \quad n = r, r+1, r+2, r+3, \dots$
2. Argumente que $X = \sum_{k=1}^r Y_k$ donde Y_k son variables aleatorias independientes con ley geométrica de parámetro p .
3. Calcule la esperanza y la varianza de X .
4. (El problema de Banach de las cajas de Fósforos) Un matemático fumador de pipa lleva siempre dos cajas de fósforos, una en el bolsillo izquierdo y otra en el bolsillo derecho de su chaqueta. Cada vez que el matemático necesita un fósforo escoge al azar una de las cajas. Consideremos el momento cuando el matemático descubre que una de las cajas de fósforos está vacía. Si consideramos que ambas cajas tienen al inicio N fósforos. ¿Cuál es la probabilidad de que en la otra caja queden $k = 0, 1, 2, \dots, N$ fósforos?

Obs: Si Z es una variable aleatoria tal que $(Z = n)$ está dada por (1) se dice que Z es una variable aleatoria binomial negativa de parámetros (r, p) .

Problema 2:*Ejercicios*

1. Sea X una v.a. con ley binomial de parámetros n y p . Pruebe que:

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{(n+1)p}$$

2. Sea X una v.a. con ley de Poisson de parámetro λ . Pruebe que:

$$\mathbb{E}(X^n) = \lambda \mathbb{E}((X+1)^{n-1})$$

Use este resultado para calcular $\mathbb{E}(X^3)$.

3. Pruebe que si X es una v.a. geométrica entonces:

$$\mathbb{P}(X = n+k | X > n) = \mathbb{P}(X = k)$$

Comente.

4. Sean X, Y variables aleatorias a valores en $\{0, 1\}$. Muestre que:

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \Leftrightarrow X, Y \text{ son independientes}$$

Problema 3:*Distribución del máximo*

Se tiene una urna que contiene N bolas numeradas de 1 a N , respectivamente. Se sacan n bolas de la urna ($n \leq N$) y se ve el valor máximo de las n bolas. Encuentre la distribución de la variable aleatoria que toma el valor de dicho máximo y su valor esperado.

Problema 4:

Coleccionista de Cupones

Una persona esta juntando un álbum con N (tipos de) láminas. Suponga que las láminas se compran de a una sin saber de cuál tipo es, y que los N tipos de láminas son equiprobables.

- Pruebe que la cantidad esperada de tipos de láminas distintas que hay cuando se compran n láminas es

$$N \left(1 - \left(\frac{N-1}{N} \right)^n \right)$$

Indicación: defina X_i como la indicatriz del evento “hay una lámina del tipo i entre las n compradas”. Calcule $E(X_i)$ y deduzca la respuesta.

- Pruebe que el número esperado de láminas que hay que comprar para completar al album es

$$N \sum_{i=1}^N \frac{1}{i}$$

Indicación: Defina Z_i como el número de láminas adicionales que hay que comprar para obtener una lámina de un nuevo tipo, después de haber obtenido por primera vez i tipos distintos. Encuentre la ley de Z_i para cada $i = 1, \dots, N$ y use esto para deducir el resultado.

Problema 5:

Número esperado de calces

Un grupo de N personas tiran sus sombreros en el centro de una pieza. Los sombreros son desordenados, y luego cada persona selecciona un sombrero al azar. Calcule el número esperado de personas que seleccionan su propio sombrero.