

MA3401-1: PROBABILIDADES
CONTROL 1 - PAUTA PROBLEMA 2

Profesor Héctor Olivero Q.

Profesores Auxiliares: Luis Fredes, Francisco Plana y Víctor Verdugo.

Problema 2.

Un *grafo* es un conjunto finito de puntos en el plano que llamaremos *vértices*, y de líneas que los conectan que llamaremos *arcos*. Denotamos un grafo G , como $G = (V, E)$ con V el conjunto de vértices y E el conjunto de arcos.

Un *clique* K en el grafo, es un subconjunto de vértices tal que todo par de vértices en K está unido por un arco. Un *conjunto independiente* L en el grafo, es un subconjunto de vértices tal que ningún par de vértices en L está unido por un arco.

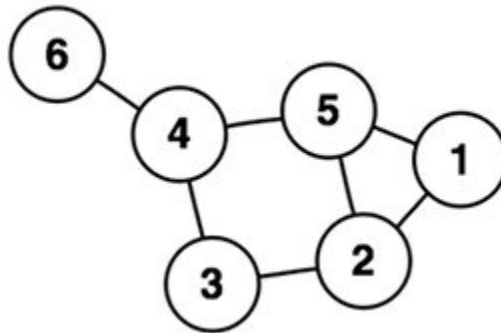


FIGURA 1. Ejemplo de grafo: Los vértices 1, 2 y 5 forman un clique de tamaño 3, mientras que los vértices 1, 3 y 6 forman un conjunto independiente de tamaño 3.

Se define el *número de Ramsey* $R(k, l)$ como el menor entero n tal que todo grafo que tiene al menos n vértices tiene un clique de tamaño k o un conjunto independiente de tamaño l . Por ejemplo, $R(2, 2) = 2$ pues cualquier grafo con más de 2 vértices tiene dos vértices que, o bien están conectados y forman un clique de tamaño 2, o bien no están conectados y forman un conjunto independiente de tamaño 2.

El objetivo de este problema es probar el siguiente teorema dado por Erdős en 1947:

Teorema: Para todo $k \geq 3$, $R(k, k) \geq 2^{k/2}$.

Para probar el teorema anterior utilizaremos el **método probabilista**. Sea V un conjunto de n vértices, con $n \leq 2^{k/2}$. Considere el grafo $G_n = (V, E_n)$ construido de la siguiente manera: Para $v_1, v_2 \in V$ se lanza de manera independiente una moneda perfecta y se agrega a E_n el arco v_1v_2 sólo si el resultado de la moneda es cara.

1. **[1.0 pts.]** Sea S un subconjunto de V de tamaño k . Muestre que si E_S es el evento “ S es un clique de tamaño k en G_n ” entonces:

$$\mathbb{P}(E_S) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}.$$

Sea $S \subseteq V$ y $[S]^2 = \{uv : u, v \in S\}$. Para cada $e \in [V]^2$, consideremos el conjunto $\Omega_e = \{0_e, 1_e\}$ y $\mathbb{P}_e$ la medida de probabilidad sobre Ω_e tal que $\mathbb{P}_e(\{1_e\}) = \mathbb{P}_e(\{0_e\}) = \frac{1}{2}$. Luego, para cada $e \in [V]^2$ tenemos el espacio de probabilidad $(\Omega_e, \mathcal{P}(\Omega_e), \mathbb{P}_e)$. Ahora, para modelar el proceso de construir aleatoriamente el grafo G_n , consideramos el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ donde $\Omega = \otimes_{e \in [V]^2} \Omega_e$ y $\mathbb{P} = \otimes_{e \in [V]^2} \mathbb{P}_e$ (la medida producto). Luego, cada $w \in \Omega$, lo podemos ver como un conjunto tal que si está 1_e es porque la arista e se encuentra en el grafo y si está 0_e es porque la arista e no está en el grafo.

Ahora que ya tenemos nuestro espacio de probabilidad, podemos enmarcar el evento E_S en este espacio. Sea $A_e = \{w \in \Omega : w_e = 1\}$, es decir, el evento en el cual la arista e si está en el grafo. Luego, $E_S = \bigcap_{e \in [S]^2} A_e$, y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_S) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{e \in [S]^2} A_e\right) = \prod_{e \in [S]^2} \mathbb{P}(A_e) \\ &= \prod_{e \in [S]^2} \mathbb{P}(\{1_e\} \times \otimes_{e' \neq e} \Omega_{e'}) \\ &= \prod_{e \in [S]^2} \mathbb{P}_e(\{1_e\}) \cdot \prod_{e' \neq e} \mathbb{P}_{e'}(\Omega_{e'}) \\ &= \prod_{e \in [S]^2} \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{|[S]^2|} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{|S|}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} \end{aligned}$$

Observación: Se usó que la familia de eventos $(A_e)_{e \in [V]^2}$ es independiente. La demostración de este hecho es directa.

2. **[1.2 pts.]** Sea K el evento “ G_n contiene un clique de tamaño k ”, pruebe que:

$$\mathbb{P}(K) \leq \frac{2^{k/2}}{k!}.$$

Sea $w(G_n) = \max\{r \in \mathbb{N} : K^r \subseteq G_n\}$, es decir, el mayor natural tal que existe un clique de ese tamaño como subgrafo de G_n (este número se conoce como *número clique*). Luego, $\mathbb{P}(K) = \mathbb{P}(w(G_n) \geq k)$. Por otro lado, si $w(G_n) \geq k$, entonces existe un conjunto S de tamaño k tal que S es un k -clique. Luego, usando esto, lo probado

en la parte anterior y el hecho de que $n \leq 2^{k/2}$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(K) = \mathbb{P}(w(G_n) \geq k) &\leq \mathbb{P}(\exists S \subseteq V, \text{ tq } |S| = k \text{ y } S \text{ es un } k\text{-clique}) \\
&= \sum_{S: |S|=k} \mathbb{P}(E_S) \\
&= \sum_{S: |S|=k} \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} \\
&= \binom{n}{k} 2^{-\frac{1}{2}k(k-1)} \\
&= \frac{2^{k/2}}{k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot 2^{-k^2/2} \\
&< \frac{2^{k/2}}{k!} \cdot n^k \cdot 2^{-k^2/2} \\
&\leq \frac{2^{k/2}}{k!} \cdot (2^{k/2})^k \cdot 2^{-k^2/2} \\
&= \frac{2^{k/2}}{k!} \cdot 2^{k^2/2} \cdot 2^{-k^2/2} \\
&= \frac{2^{k/2}}{k!}
\end{aligned}$$

3. **[0.4 pts.]** Pruebe que para $k \geq 3$,

$$\frac{2^{k/2}}{k!} < \frac{1}{2}.$$

Por inducción en k . Para $k = 3$ se tiene, pues $\frac{2^{3/2}}{3!} = \frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}$. Ahora:

$$\begin{aligned}
\frac{2^{(k+1)/2}}{(k+1)!} &= \frac{2^{k/2}}{k!} \cdot \frac{\sqrt{2}}{k+1} \\
&< \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3+1} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8} \\
&< \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Hemos concluido entonces que $\mathbb{P}(K) \leq \frac{2^{k/2}}{k!} < \frac{1}{2}$.

4. **[2.2 pts.]** Sea L el evento “ G_n contiene un conjunto independiente de tamaño k ”.
Procediendo como antes pruebe que:

$$\mathbb{P}(L) < \frac{1}{2}.$$

Sea $S \subseteq V$ de tamaño k y H_S el evento S es un conjunto independiente de tamaño k . De manera análoga a como se hizo en la parte 1), se prueba que $\mathbb{P}(H_S) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}$. Ahora, sea $\alpha(G_n) = \max\{r \in \mathbb{N} : \overline{K^r} \subseteq G_n\}$, es decir, el mayor natural tal que G_n posee un conjunto independiente de ese tamaño. Este valor se conoce como *número de independencia*. Luego, $\mathbb{P}(L) = \mathbb{P}(\alpha(G_n) \geq k)$. Por otro lado, si $\alpha(G_n) \geq k$, entonces existe $S \subseteq V$ conjunto independiente de tamaño k , y por lo tanto, de manera análoga a como se hizo en la parte 2) se prueba que $\mathbb{P}(L) \leq \frac{2^{k/2}}{k!}$ y usando la parte 3) se concluye que $\mathbb{P}(L) < \frac{1}{2}$.

5. **[1.2 pts.]** Notando que $\mathbb{P}(K \cup L) < 1$ concluya el teorema.

Notemos que $\mathbb{P}(K \cup L) \leq \mathbb{P}(K) + \mathbb{P}(L) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Luego, $\mathbb{P}((K \cup L)^c) > 0$, es decir, $\mathbb{P}(K^c \cap L^c) > 0$, y por lo tanto existe $w \in K^c \cap L^c$. Pero esto dice que si $n \leq 2^{k/2}$ entonces hay una configuración en la cual no hay un conjunto independiente de tamaño a lo menos k ni tampoco un clique de tamaño a lo menos k , y por lo tanto $R(k, k) > 2^{k/2}$, lo que concluye la demostración del teorema.

Tiempo: 3 hrs.