



Universidad De Chile
Facultad De Ciencias Físicas y Matemáticas
Profesor: Raúl Manasevich
Prof. Aux.: Pablo Muñoz, Alberto Vera Azócar
albvera@ing.uchile.cl

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Clase Auxiliar 11 - Convolución y Delta de Dirac¹

15 de junio de 2012

Problema 1 [Impulsos].- Resuelva los siguientes problemas de Cauchy

(a) $2y'' + y' + 2y = \delta_5(t)$, con condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Calcule además $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$.

(b) $y'' + y = \delta(t - 2\pi) \cos(t)$, con condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Problema 2 [Convólución].-

(a) Encuentre $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s(s^2+1)} \right)$

(b) Obtenga la transformada de $f(t) = \int_0^t (t - \tau)^2 \cos(2\tau) d\tau$.

(c) Sea $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua a trozos y de orden exponencial. Demuestre que la solución de $y'' + 4y = g(t)$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$ está dada por

$$y(t) = 3 \cos(2t) - \frac{1}{2} \sin(2t) + \frac{1}{2} \int_0^t \sin(2(t - \tau)) g(\tau) d\tau$$

Problema 3 [Funciones Periódicas].-

(a) Obtenga la transformada de $f(t)$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

$$\text{y } f(t + 2) = f(t) \quad \forall t \geq 2.$$

(b) Encuentre la transformada de $g(t) = |\cos(t)|(1 + e^{\alpha t})$, con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

¹Paul A. M. Dirac (1902–1984), matemático y físico inglés, recibió el premio Nobel en 1933 (junto a Schrödinger) por su trabajo en mecánica cuántica. En 1928 su ecuación relativista predijo la existencia de un anti-electrón (o positrón) que no fue observado sino hasta 1932.