Universidad de Chile
Facultad De Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601 - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Sistemas Lineales

Alberto Vera Azócar, albvera@ing.uchile.cl

1. Introducción

Como motivación, comenzamos recordando la solución de una edo simple de orden 1, consideremos el problema de Cauchy dado por:

$$\begin{aligned} x'(t) &= a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

Si suponemos que las funciones $a(t), b(t)$ son continuas en un intervalo I, esta EDO la resolvemos aplicando el factor integrante $\varphi(t) := \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right)$, definamos además $\varphi(t)^{-1} := \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right)$, notamos que $\varphi(t)\varphi(t)^{-1} = 1$. Resolvemos entonces como sigue:

$$\begin{aligned} x'(t) - a(t)x(t) &= b(t) \qquad \Big/ \cdot\varphi(t) \\ x'(t)\varphi(t) - a(t)x(t)\varphi(t) &= b(t)\varphi(t) \\ \frac{d}{dt}\left(x(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}\right) &= e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} b(t) \qquad \Big/ \int_{t_0}^{t} \\ x(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} - x_0 &= \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau} b(s)ds \\ x(t) &= e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} x_0 + e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau} b(s)ds \\ x(t) &= \underbrace{\varphi(t)^{-1}x_0}_{\text{sol homogénea}} + \underbrace{\varphi(t)^{-1}\int_{t_0}^{t} \varphi(s)b(s)ds}_{\text{sol particular}} \end{aligned}$$

2. Teoría Preliminar

Ahora veamos el caso general, diremos que un sistema es homogéneo, que denotaremos como (H), si se puede escribir en la forma

$$(H) \quad \vec{x}\,'(t) = A(t)\vec{x}$$

Donde $A(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m\times n})$, es decir, es una función continua de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Análogamente, diremos que un sistema es no homogéneo, que denotaremos como (NH), si se escribe en la forma

$$(NH) \quad \vec{x}\,'(t) = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t)$$

Donde $\vec{f}(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Proposición 1 (Principio de Superposición). *Si $\vec{x}^1, \cdots, \vec{x}^k$ son k soluciones de (H), entonces para cualquier elección de constantes $c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R}$, se tiene que $\sum_{i=1}^{k} \vec{x}^i c_i$ es también solución de (H).*

La proposición anterior nos da la idea de que siempre hay una relación lineal entre soluciones de (H), digamos que tenemos n soluciones y nos preguntamos si son redundantes (por ejemplo que alguna sea combinación lineal de las otras), para responder esta pregunta definimos el Wronskiano.

Definición 1 (Wronskiano). *Sean $\vec{x}^{\,1}, \cdots, \vec{x}^{\,n}$ funciones de $I \subseteq \mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$, se define el Wronskiano para estas funciones como*

$$W(\vec{x}^{\,1}, \cdots, \vec{x}^{\,n})(t) := det[\ \vec{x}^{\,1}| \quad \vec{x}^{\,2}| \quad \cdots \quad |\vec{x}^{\,n}\ ]$$

En otras palabras, el Wronskiano es el determinante de una matriz que en la columna j tiene al vector $\vec{x}^{\,j}(t)$, con $j = 1, \cdots, n$.

Proposición 2. *Sean $\vec{x}^{\,1}, \cdots, \vec{x}^{\,n}$ soluciones de (H), entonces*

$$\vec{x}^{\,1}, \cdots, \vec{x}^{\,n} \text{ son l.i. } \iff W(\vec{x}^{\,1}, \cdots, \vec{x}^{\,n})(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$$

Teorema 1. *El conjunto de soluciones de (H) es un espacio vectorial de dimensión n*

El teorema anterior nos dice que hay a lo más n soluciones l.i. de (H), es decir, si encontramos n soluciones, le calculamos el Wronskiano y nos da distinto de cero, entonces tenemos la base, pues ya tendremos las n soluciones l.i.

Definición 2 (Matriz Fundamental). *Una matriz $X(t)$, cuyas columnas son n soluciones l.i. de (H) se llama matriz fundamental de (H).*

En otras palabras, una matriz fundamental se escribe como

$$X(t) = \begin{bmatrix} \vec{x}^{\,1}(t) & \vec{x}^{\,2}(t) & \cdots & \vec{x}^{\,n}(t) \end{bmatrix}$$

Se desprende de la proposición 2 que si $X(t)$ es matriz fundamental, $det(X(t)) \neq 0\ \forall t \in I$, luego una matriz fundamental es invertible en todo su dominio.

Proposición 3. *Dada una matriz fundamental $X(t)$ del sistema (H), entonces cualquier solución del sistema se puede escribir como $X(t)\vec{c}$, con $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ un vector de constantes.*

Proposición 4. *Sea $\vec{x}_p(t)$ una solución particular de (NH), entonces cualquier otra solución $\vec{x}(t)$ de (NH) se puede escribir como $\vec{x}(t) = \vec{x}_p(t) + \vec{x}_h(t)$, donde $\vec{x}_h(t)$ es una combinación lineal de soluciones de (H) .*

La proposición anterior nos dice que para resolver (NH), primero obtengamos n soluciones l.i. de la homogenea, luego obtengamos una solución particular (cualquiera). Con esto hemos terminado, pues cualquier otra solución se escribe como la particular que obtuvimos más una combinación lineal de las n soluciones de la homogenea.

Teorema 2 (Variación de Parámetros). *Sea X una matriz fundamental del sistema (H), una solución particular del sistema (NH) está dada por:*

$$\vec{x}_p(t) = X(t) \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\vec{f}(s)ds$$

Usando el Teorema de variación de parámetros junto con la proposición 3 concluimos que dada una matriz fundamental $X(t)$ la solución general del sistema no homogéneo (NH) está dado por

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{c} + X(t) \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\vec{f}(s)ds$$

3. Encontrando Soluciones

3.1. Matriz Exponencial

Definición 3 (Matriz Exponencial). *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, matriz cuyos coeficientes pueden ser reales o complejos. Se define para $t \in \mathbb{R}$ la exponencial de At como*

$$e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

Se demuestra que la matriz exponencial siempre está bien definida, más aún es una serie absolutamente convergente, por lo que la derivada de la serie es la serie de las derivadas. A continuación se exponen las propiedades más importantes de la matriz exponencial

Propiedad 1. *Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $t, s \in \mathbb{R}$, se tiene que:*

1. $(e^{At})' = Ae^{At} = e^{At}A$
2. $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$
3. $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$
4. $AB = BA \Leftrightarrow Be^{At} = e^{At}B$
5. $AB = BA \Leftrightarrow e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t}$
6. $e^{0_{n\times n}} = I_{n\times n}$

La gracia de la matriz exponencial es que nos permite resolver el sistema a coeficientes constantes, el problema es que el cálculo de tal matriz es difícil, pero se puede hacer en algunos casos especiales. Los siguientes teoremas muestran la utilidad de la matriz exponencial:

Teorema 3. *La solución del sistema $\vec{x}' = A\vec{x}$ con condición inicial $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ está dada por $\vec{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{x}_0$.*

Teorema 4. *Sea $t_0 \in \mathbb{R}$, para el sistema $\vec{x}' = A\vec{x}$ se tiene que $\Phi(t) = e^{A(t-t_0)}$ es una matriz fundamental. Por esto a $\Phi(t)$ la llamaremos matriz fundamental canónica.*

Proposición 5. *Sea $D = diag(d_1, \cdots, d_n)$ (matriz diagonal), entonces $e^{Dt} = diag(e^{d_1 t}, \cdots, e^{d_n t})$.*

Proposición 6. *Sea A diagonalizable, digamos $A = PDP^{-1}$, entonces $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$.*

3.2. Vectores Propios

Hasta ahora hemos visto que si tenemos una matriz fundamental del sistema homogéneo podemos resolver el no homogéneo. Si podemos calcular la exponencial de la matriz estamos listos pues tendremos ya una matriz fundamental. Ahora nos centraremos en otra técnica para obtener matrices fundamentales. Usaremos vectores propios y vectores propios generalizados.

Proposición 7. *Consideremos el sistema $\vec{x}' = A\vec{x}$, se tiene que $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$ es solución del sistema si y solamente si $\vec{v}$ es vector propio de A con valor propio asociado λ.*

Digamos que A tiene n valores propios $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, tendrá entonces n vectores propios y por lo tanto ya tenemos las n soluciones l.i. que serán $\vec{x}^{\,i}(t) = e^{\lambda_i t}\vec{v}_i$, con $i = 1, \cdots, n$.

Pensemos que A tiene un valor propio $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, claramente su conjugado $\bar{\lambda}_1$ también será valor propio, las soluciones asociadas a λ_1 y a $\bar{\lambda}_1$ están muy relacionadas:

Proposición 8. *Si $w(t) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ resuelve $\vec{x}' = A\vec{x}$, entonces su función conjugada $\bar{w}(t)$ también resuelve el sistema.*

El siguiente teorema nos dice como obtener soluciones reales a partir de soluciones complejas, esto es importante ya que en la práctica no estamos interesados en soluciones complejas.

Teorema 5. *Sean $w_1(t), \cdots, w_q(t)$ funciones complejas l.i. que resuelven (H) y tal que ninguna de ellas es conjugada de la otra, entonces si escribimos $w_j(t) = \vec{u}_j(t) + i\vec{v}_j(t)$, $j = 1, \cdots, q$ donde $\vec{u}_j(t), \vec{v}_j(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, tendremos que $\vec{u}_1, \vec{v}_1, \cdots, \vec{u}_q, \vec{v}_q$ son soluciones l.i. de (H)*

3.3. Vectores Propios Generalizados

Hasta ahora sabemos lidiar con n valores propios reales distintos y con valores complejos. Para el caso de valores propios repetidos necesitamos un poco de teoría que incluyen temas de álgebra lineal.

Teorema 6. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con valores propios $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$, para cada valor propio $i = 1, \cdots, s$ existe un natural p_i tal que*

$$Ker(A-\lambda_i I) \subsetneq Ker(A-\lambda_i I)^2 \subsetneq \cdots \subsetneq Ker(A-\lambda_i I)^{p_i} = Ker(A-\lambda_i I)^{p_i+1} = Ker(A-\lambda_i I)^{p_i+2} = \cdots$$

Si denotamos $M_{\lambda_i} = Ker(A - \lambda_i I)^{p_i}$ se tiene que

$$\mathbb{C}^n = M_{\lambda_1} \oplus M_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus M_{\lambda_s}$$

Además $dim(M_{\lambda_i})$ es la multiplicidad algebraica de λ_i.

Gracias al teorema anterior, es posible descomponer $\mathbb{C}^n$ en s sub-espacios tales que su suma directa es el espacio entero. Con esto se puede expresar la matriz exponencial de manera más amigable

Teorema 7. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con valores propios $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ y $c \in \mathbb{C}^n$, entonces podemos escribir $c = c^1 + \cdots + c^s$, con $c^i \in M_{\lambda_i}$, luego*

$$e^{At}c = \sum_{i=1}^{s} e^{At}c^i \qquad \textit{donde} \qquad e^{At}c^i = e^{t\lambda_i} \sum_{k=0}^{p_i-1} \frac{t^k(A-\lambda_i I)^k}{k!} c^i$$

Ahora, si juntamos el teorema anterior con el teorema 3 obtenemos el siguiente, que finalmente nos da la forma de obtener soluciones de la homogenea sin importar si los valores propios están repetidos o no

Teorema 8. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con valores propios $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$, la solución del problema $\vec{x}' = A\vec{x}$ con condición inicial $\vec{x}(0) = c$ está dada por*

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{s} e^{t\lambda_i} \sum_{k=0}^{p_i-1} \frac{t^k(A-\lambda_i I)^k}{k!} c^i, \qquad c^i \in M_{\lambda_i}$$