MA2601-3: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2012-01.
Profesor: Raul Manasevich. **Auxiliares:** Pablo Muñoz. Alberto Vera

Auxiliar n°4

20 de abril de 2012

P1. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se define

$$e^{At} = \sum_{k\geq 0} \frac{A^k t^k}{k!}$$

Pruebe las siguientes propiedades:

a) Si $AB = BA$ entonces $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$

b) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad e^{At} = e^{\lambda t} e^{(A-\lambda I)t}$

c) Si $\lambda \in R$ es tal que, $\exists m_0 \quad \forall m \geq m_0 \quad (A-\lambda I)^m = 0$, entonces

$$e^{At} = e^{\lambda t}\left[I + t(A-\lambda I) + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(A-\lambda I)^{m-1}\right]$$

Utilice lo anterior para calcular explicitamente la matriz exponencial de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

P2. Considere el sistema lineal de ecuaciones

$$x' = Ax$$

donde A es una matriz $n \times n$ antisimetrica, es decir, $A^T = -A$. Demuestre que si $x_1(t), x_2(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ son soluciones del sistema anterior, y existe $t_0 \in \mathbb{R}$ en que $x_1(t_0)$ es ortogonal a $x_2(t_0)$, entonces son ortogonales en todo $\mathbb{R}$.

P3. Sea $n \in \mathbb{N}$ y considere la matriz $A \in \mathcal{M}_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ definida por bloques

$$A = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{bmatrix}$$

donde I_n y 0_n son la identidad y el zero en $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ respectivamente. Demuestre que

a) $\dfrac{e^{At} + e^{-At}}{2} = \cosh(t) I_{2n}$

b) $\dfrac{e^{At} - e^{-At}}{2} = \sinh(t) A$