Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesora Salomé Martínez
Semestre de Otoño, 2012

Auxiliar 5

Auxiliares: Álvaro Bustos, Esteban Escorza
Ayudantes: Carolina Mayol, Matías Yáñez

$\boxed{\text{P1}}$ Resuelva las siguientes ecuaciones. Utilice los métodos para ecuaciones no homogéneas vistos en clases si es necesario.

P1.a) $y'' + 4y' + 2y = xe^{-2x}$

Solución. El polinomio característico de esta ecuación es $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 2$, cuyas raíces son $-2 \pm \sqrt{2}$. De este modo, la ecuación homogénea tiene una base de soluciones de la forma $\{y_1(x) = e^{-(2+\sqrt{2})x}, y_2(x) = e^{-(2-\sqrt{2})x}\}$.
Para usar una solución particular, podemos proceder de dos maneras:

- Podemos usar el método de variación de parámetros para encontrar una solución, la cual supondremos en la forma $y_p(x) = c_1(x)e^{-(2+\sqrt{2})x} + c_2(x)e^{-(2-\sqrt{2})x}$. De este modo, las funciones $c_1(x), c_2(x)$ satisfacerán el sistema de ecuaciones dado por:

$$\begin{aligned} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) &= 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) &= xe^{-2x} \end{aligned}$$

  Resolviendo el sistema de ecuaciones para c_1' y c_2' e integrando podemos obtener la identidad de y_p.

- Podemos usar el método de coeficientes indeterminados. Para ello, procedemos de la siguiente forma: notemos que la ecuación puede escribirse como $(D^2 + 4D + 2)y = xe^{-2x}$, y que este último término es solución de la ecuación diferencial a coeficientes constantes $(D+2)^2 y = 0$. De este modo, toda solución de la ecuación diferencial que buscamos resolver es también solución de la ecuación a coeficientes constantes $(D^2+4D+2)(D+2)^2 y = 0$. Utilizando el método usual, vemos que $y(x)$ debe ser de la forma:

$$y(x) = \underbrace{c_1 e^{-(2+\sqrt{2})x} + c_2 e^{-(2-\sqrt{2})x}}_{\text{Solución homogénea}} + \underbrace{(c_3 + c_4 x)e^{-2x}}_{\text{Solución particular}}$$

  De este modo, $y_p(x)$ ha de ser de la forma $(a+bx)e^{-2x}$ (podríamos haber llegado a esta conclusión directamente viendo que esta expresión tiene «la misma forma» que el lado derecho de la ecuación).

Reemplazando en la ecuación original, obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
y_p(x) &= (a+bx)e^{-2x} \\
y_p'(x) &= be^{-2x} - 2(a+bx)e^{-2x} = ((b-2a) - 2bx)e^{-2x} \\
y_p''(x) &= -2be^{-2x} - 2((b-2a) - 2bx)e^{-2x} = 4(bx + (a-b))e^{-2x} \\
\therefore (D^2+4D+2)y &= 2(11bx + 11a - 10b)e^{-2x} \\
&= xe^{-2x} \\
\implies b &= \frac{1}{22} \\
a &= \frac{5}{121}
\end{aligned}
$$

de modo que la solución particular está dada por:

$$y_p(x) = \left(\frac{5}{121} + \frac{1}{22}x\right) e^{-2x}$$

y por lo tanto, la solución general está dada por:

$$y(x) = \left(\frac{5}{121} + \frac{1}{22}x\right) e^{-2x} + c_1 e^{-(2+\sqrt{2})x} + c_2 e^{-(2-\sqrt{2})x}$$

P1.b) $y'''' - 10y''' + 35y'' - 50y' + 24y = x^2$

Solución. El polinomio característico de la ecuación es de la forma $p(\lambda) = \lambda^4 - 10\lambda^3 + 35\lambda^2 - 50\lambda + 24$. Al ser este polinomio mónico con coeficientes enteros, deducimos que las soluciones de $p(\lambda) = 0$ son divisores de 24, i.e. $\lambda \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24\}$. Mediante prueba y error, vemos que $\lambda = 1, 2, 3, 4$, de modo que una base de soluciones de la ecuación es $\{e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}\}$. Para hallar la solución particular, observamos que el lado derecho es un polinomio de grado 2, por lo que podemos asumir (ya que la EDO homogénea no tiene soluciones polinómicas) que $y_p(x) = a + bx + cx^2$. Reemplazando en la ecuación original, vemos que:

$$
\begin{aligned}
y_p &= a + bx + cx^2 \\
y_p' &= b + 2cx \\
y_p'' &= 2c \\
y_p''' = y_p'''' &= 0 \\
\therefore 35(2c) - 50(b + 2cx) + 24(a + bx + cx^2) &= x^2
\end{aligned}
$$

y por lo tanto, igualando ambos polinomios y resolviendo para a, b, c obtenemos que:

$$y_p(x) = \frac{1}{24}x^2 + \frac{25}{144}x + \frac{415}{1728}$$

P1.c) $y''' - 5y'' - y' + 5 = x^3 - 3x + 1$

Solución. Análoga al caso anterior.

P1.d) $x^3 y''' - 2x^2 y'' - 17xy' - 7y = 0$

Solución. Esta es una ecuación de Euler-Cauchy, la cual podemos resolver mediante el cambio de variable $x = e^u$ o mediante el reemplazo $y = x^m$. En el segundo caso, obtenemos, como $y' = mx^{m-1}, y'' = m(m-1)x^{m-2}, y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$, la siguiente ecuación (polinomio característico) para m, al reemplazar en la ecuación original:

$$m(m-1)(m-2) - 2m(m-1) - 17m - 7 = 0$$

Este resulta ser un polinomio mónico en m, por lo que sus soluciones deben ser divisores de 7; así, vemos que -1 es una raíz simple del polinomio, mientras que 7 es raíz doble. Obtenemos entonces que la solución general de esta ecuación es de la forma:

$$y(x) = c_1 x^{-1} + c_2 x^7 + c_3 x^7 \ln(x)$$

El último término surge de la existencia de una raíz múltiple y puede deducirse haciendo el cambio de variable $x = e^u$.

P2 Considere y_1 e y_2 dos funciones definidas en un intervalo I, soluciones de las ecuaciones:

$$y_1'' + p_1(x)y_1 = 0,\ y_2'' + p_2(x)y_2 = 0$$

con $p_1(x) > p_2(x)$ $(\forall x \in I)$.

P2.a) *(Teorema de comparación de Sturm)* Demuestre que, dadas las condiciones anteriores, entre dos ceros cualesquiera de y_2 hay **al menos** un cero de y_1.

Solución. Consideremos un intervalo $[a, b] \subset I$ tal que $y_2(a) = y_2(b) = 0$ y esta función no se anule en (a, b). Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $y_2(x) > 0\, \forall x \in (a, b)$ (por continuidad; si fuese negativa, podemos tomar $-y_2$ y continuar este desarrollo). Supongamos que $y_1(x)$ no se anula en $[a, b]$. Nuevamente podemos asumir que $y_1(x) > 0\, \forall x \in [a, b]$; de este modo, si consideramos el Wronskiano $W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$, se tendrá que $W(a) = y_1(a)y_2'(a)$ y $W(b) = y_1(b)y_2'(b)$.
Como $y_2 > 0$ en (a, b) y se sabe que $y_2(a) = y_2(b) = 0$ podemos suponer que $y_2(a) \geq 0$, $y_2(b) \leq 0$. Calculemos $W'(x)$. Por la fórmula de derivación de determinantes, tendremos que $W'' = y_1 y_2'' + y_2 y_1''$. Como, por hipótesis, $y_1'' = -p_1 y_1$, $y_2'' = -p_2 y_2$, se tendrá que $W''(x) = y_1(x)y_2(x)[p_1(x) - p_2(x)]$. Sabemos que $y_1, y_2 > 0$ en (a, b) y que $p_1(x) > p_2(x)$ en todo $[a, b]$, con lo que concluimos que $W'(x) > 0$ en (a, b), i.e. W es estrictamente creciente en este intervalo. Pero W es continua, y $W(a) > W(b)$, lo que contradice el hecho de ser estrictamente creciente. Por lo tanto, no puede ser que $y_1(x)$ no se anule en ningún punto de $[a, b]$.

P2.b) Pruebe que toda solución no trivial de la ecuación:

$$y'' + p(x)y = 0$$

tiene, a lo más, un cero en todo intervalo I en que $p(x) < 0$.

Solución. Aplicamos el teorema anterior, comparando la ecuación con $y'' = 0$. Como $p(x) < 0$, entre dos ceros de una solución de $y'' + p(x)y = 0$ en este intervalo debe haber al menos un cero de toda solución de $y'' = 0$. Pero $y'' = 0$ tiene la solución constante $y \equiv 1$, que no tiene ceros; de este modo, no puede haber dos o más ceros en este intervalo, i.e. puede haber a lo más uno.

P3 Considere la siguiente ecuación diferencial, conocida como **ecuación de Bessel**:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Las soluciones de esta ecuación se denominan **funciones de Bessel**[1] de orden α.

P3.a) Demuestre que, si J_n, Y_n son soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel de orden n (con $n \in \mathbb{Z}$) , entre dos ceros de J_n hay exactamente un cero de Y_n y viceversa.

Solución. Directo del teorema de separación de Sturm, visto en la auxiliar 4.

P3.b) Sea J_0 una función de Bessel de orden cero (no trivial) que satisface[2] las condiciones iniciales: $J_0(0) = 1, J_0'(0) = 0$. Pruebe que J_0' satisface la ecuación de Bessel de orden 1 (y así, definimos J_1 como $-J_0'$). ¿Puede generalizarse este resultado?

Solución. Para este efecto, escribiremos la ecuación de Bessel en la forma:

$$x^2y'' + xy' + x^2y = \alpha^2 y$$

Derivando esta expresión, obtenemos lo siguiente:

$$(x^2y''' + xy'' + x^2y') + (2xy'' + y' + 2xy) = \alpha^2 y$$

Para $\alpha = 0$, el lado derecho se anula. Además, el segundo término entre paréntesis corresponde a $2(xy'' + y' + xy) - y'$; en esta expresión, como y es solución de la ecuación de Bessel de orden cero, el término entre paréntesis se anula y nos queda la expresión:

$$x^2y''' + xy'' + x^2y' - y' = 0 \implies x^2y''' + xy'' + x^2y' = 1^2y'$$

que es la ecuación de Bessel de orden 1 en y', lo que queríamos probar.
En general, se tiene lo siguiente: si $J_{\alpha-1}$ y $J_{\alpha+1}$ son soluciones de la ecuación de Bessel de orden $\alpha - 1$ y $\alpha + 1$, respectivamente, se tendrá que:

$$x^2 J''_{\alpha-1} + xJ'_{\alpha-1} + x^2 J_{\alpha-1} = (\alpha - 1)^2 J_{\alpha-1}$$

$$x^2 J''_{\alpha+1} + xJ'_{\alpha+1} + x^2 J_{\alpha+1} = (\alpha + 1)^2 J_{\alpha+1}$$

Restando ambas expresiones y manipulando adecuadamente llegamos a la expresión general:

$$J'_\alpha(x) = \frac{1}{2}(J_{\alpha-1}(x) - J_{\alpha+1}(x))$$

P3.c) Demuestre que la distancia entre dos ceros consecutivos de J_0 es siempre menor que π. (**Sugerencia**: use el cambio de variable $y = u/\sqrt{x}$ y piense en lo visto previamente. ¿Qué ocurre con las soluciones de $y'' + y = 0$?).

[1] Puede probarse que, en general, éstas no pueden expresarse de forma finita como combinaciones de polinomios, funciones exponenciales, trigonométricas y sus inversas, es decir, éstas son funciones no elementales.

[2] Denominamos a J_0 **función de Bessel de primera especie de orden cero**.

Solución. Reemplazando $y = u/\sqrt{x}$ en la ecuación de Bessel obtenemos:

$$x^2\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)'' + x\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)' + x^2\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right) = \alpha^2\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)$$

$$x^2\left(\frac{u''}{\sqrt{x}} - \frac{u'}{x\sqrt{x}} + \frac{3u}{4x^2\sqrt{x}}\right) + x\left(\frac{u'}{\sqrt{x}} + \frac{u}{2x\sqrt{x}}\right) + x^2\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right) = \alpha^2\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)$$

Agrupando términos, vemos que aquellos que tienen u' se cancelan entre sí, y, tras dividir la expresión resultante por $x^{3/2}$, nos queda:

$$u'' + u\left(1 + \frac{1}{4x^2}\right) = u\frac{\alpha^2}{x^2}$$

o, equivalentemente:

$$u'' + u\left(1 + \frac{1-4\alpha^2}{4x^2}\right) = 0$$

Notemos que para $\alpha = 0$ (y, en general, para $|\alpha| < \frac{1}{2}$, el término entre paréntesis es mayor a 1. De este modo, aplicando el teorema de comparación de Sturm vemos que, dada una solución no trivial de $y'' + y = 0$ (en particular, tomando $\operatorname{sen}(x - x_0)$), entre dos ceros de ésta hay al menos un cero de J_0. Así, si x_0 es un cero de J_0, tomando $\varepsilon > 0$ arbitrario vemos que en $[x_0 + \varepsilon, x_0 + \varepsilon + \pi]$ hay al menos otro cero de J_0; pero como ε es arbitrario, podemos hacerlo tender a cero y concluir que en $[x_0, x_0 + \pi]$ hay al menos un cero de J_0 además de x_0. Luego, la distancia entre dos ceros de J_0 es menor o igual a π.

P3.d) Encuentre una solución de la ecuación de Bessel en términos de funciones elementales si $\alpha = \frac{1}{2}$.

Solución. En la pregunta anterior vimos que, haciendo el cambio de variable $y = u/\sqrt{x}$, la ecuación de Bessel se reduce a:

$$u'' + u\left(1 + \frac{1-4\alpha^2}{4x^2}\right) = 0$$

Cuando $\alpha = \frac{1}{2}$, el término entre paréntesis es igual a 1 (ya que la fracción se anula). De este modo, la ecuación se reduce a $u'' + u = 0$, que tiene $\{\operatorname{sen}(x), \cos(x)\}$ como base de soluciones. Por lo tanto, las funciones de Bessel de orden $1/2$ son de la forma:

$$f_{1/2}(x) = c_1\frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}} + c_2\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$$