

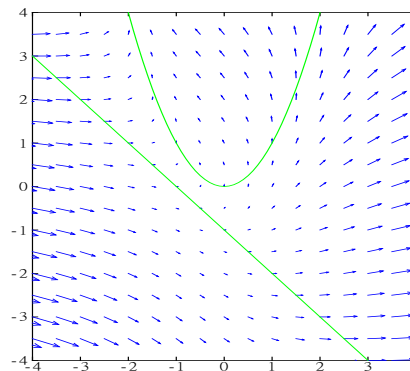
Auxiliar 11 + ε actually is dolar

Auxiliares: Álvaro Bustos, Chaparrón Bonaparte
Ayudantes: Carolina Mayol, Matías Yáñez

P1 Esboce un diagrama de pendientes para los siguientes sistemas de EDOs e indique visualmente la existencia y el comportamiento de los puntos de equilibrio.

P1.a)
$$\begin{cases} x' &= x^2 - y \\ y' &= 1 + x + y \end{cases}$$

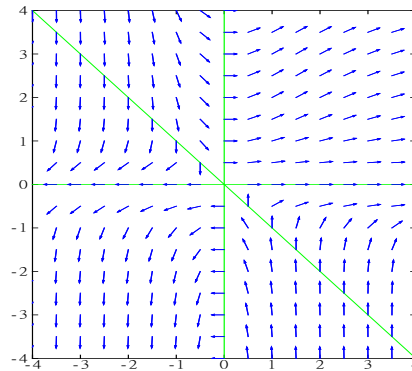
Solución. El procedimiento a seguir en estos casos es en general como sigue: primero se trazan las nulclinas (las curvas $x' = 0$ e $y' = 0$) en el plano XY , con el fin de facilitar el análisis, y luego se esboza una dirección aproximada de la curva solución en algunos puntos. Recuerdese que las curvas solución cortarán horizontalmente a la nulclina $y' = 0$ y verticalmente a la nulclina $x' = 0$, y que un punto de intersección entre ambas nulclinas corresponderá a un punto de equilibrio.



Puede observarse en la gráfica que las nulclinas nunca se cortan, por lo que no hay puntos de equilibrio.

P1.b)
$$\begin{cases} x' &= 2^{x+y} - 1 \\ y' &= xy^2 \end{cases}$$

Solución. Obsérvese la siguiente gráfica:



La nulclina $x' = 0$ corresponde a la recta $x + y = 0$, mientras que los ejes corresponden a la nulclina $y' = 0$. Se observa que éstas se intersectan en el origen $(0,0)$, por lo que en este punto hay un equilibrio; sin embargo, las líneas de pendiente tienden a alejarse del origen, por lo que podemos deducir que el punto de equilibrio encontrado es inestable.

P2 Encuentre los puntos de equilibrio de los siguientes sistemas y lineálcelos para estudiar su comportamiento en cada punto de equilibrio.

P2.a)
$$\begin{cases} x' &= y^2 \sin(xy) \\ y' &= x^2 \cos(y) + \sin(x^2) \end{cases}$$

Solución. Por inspección, podemos ver que todos los puntos de la recta $x = 0$ son puntos de equilibrio. Es más, el origen es un punto de inflexión, por lo que $J_{\vec{F}} = 0$; por lo tanto, el método del Jacobiano no es aplicable a este caso ya que al linealizar se obtiene la ecuación trivial $\vec{y}' = \vec{0}$.

P2.b)
$$\begin{cases} x' &= x - y \\ y' &= \sin(x + y) \end{cases} \quad (\text{corregido; no me acuerdo del enunciado del que hice en clases})$$

Solución. Tenemos que $(0,0)$ es una solución de la ecuación $\vec{F}(x,y) = \vec{0}$, es decir, es el único punto de equilibrio. Las otras soluciones satisfarán $x = y$ y $\sin(2x) = 0 \implies x = k\pi/2$; analizaremos solo el origen, ya que el análisis de los otros puntos es similar (como ejercicio, analice el punto $(\pi/2, \pi/2)$, y compare con los resultados del análisis en el origen). Así, se tiene que el Jacobiano de $\vec{F}$ está dado por:

$$J_{\vec{F}}(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \cos(x+y) & \cos(x+y) \end{bmatrix}$$

y al evaluar en $(0,0)$ se tiene:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

cuyo polinomio característico es $(1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$. Resolviendo obtenemos que los valores propios son:

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i$$

ambos valores propios con parte real positiva, por lo que el punto de equilibrio es inestable.

P2.c)
$$\begin{cases} x' &= Ax + By \\ y' &= -Bx + Ay \end{cases}$$

Solución. Para facilitar el análisis de este caso, haremos el paso a coordenadas polares: escribiremos $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, siendo (r, θ) nuestras nuevas variables dependientes. De este modo:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dr}{dt} \cos(\theta) - r \frac{d\theta}{dt} \sin(\theta) \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dr}{dt} \sin(\theta) + r \frac{d\theta}{dt} \cos(\theta) \end{aligned}$$

Así, podemos ver que $r \rightarrow 0 \iff x \rightarrow 0 \wedge y \rightarrow 0$; además, hemos visto que $(x, y) = (0, 0)$ es un punto de equilibrio. Podemos despejar dr/dt y $d\theta/dt$ a partir de lo anterior y obtenemos:

$$\frac{dr}{dt} = \alpha r \cos^2(\theta) + \beta r \sin(\theta) \cos(\theta) - \beta r \sin(\theta) \cos(\theta) + \alpha r \sin^2(\theta) = \alpha r$$

y de igual modo $d\theta/dt = -\beta$. Así, $r = r_0 e^{\alpha t}$, de modo que el punto es un equilibrio asintóticamente estable cuando $\alpha < 0$ (equivalente a que la matriz de 1×1 , $[\alpha]$, sea definida negativa), y es inestable cuando $\alpha > 0$. Además, las soluciones dan infinitas vueltas en torno al origen, ya que $\theta = \theta_0 - \beta t$. Cuando $\alpha = 0$ las soluciones son estables, pero no asintóticamente (no convergen al punto de equilibrio cuando $t \rightarrow \infty$, pero se mantienen a una distancia acotada de éste).

P2.d) $y'' + ay' + by = 0$

Solución. Esta ecuación es equivalente al sistema autónomo dado por (haciendo $y' = z$):

$$\begin{cases} y' &= z \\ z' &= -az - by \end{cases}$$

la cual tiene un punto de equilibrio en $(0, 0)$, si $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Nótese que existen otros puntos de equilibrio cuando $b = 0$ (caso en que la ecuación se reduce a una EDO de primer orden). Se tiene que la matriz del sistema está dada por:

$$A = J_{\vec{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}$$

cuyo polinomio característico está dado por $p(\lambda) = \lambda(a + \lambda) + b = \lambda^2 + a\lambda + b$ (nótese que coincide con el polinomio característico de la ecuación). De este modo se tiene que los valores propios son:

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Cuando $a > 0$, $b > 0$ y $a^2 > 4b$ se obtiene que ambos valores son negativos, de modo que el punto de equilibrio es asintóticamente estable. Cuando $a > 0$, $a^2 < 4b$ se obtienen soluciones complejas conjugadas con parte real negativa, por lo que hay equilibrio estable. Cuando $a < 0$ el equilibrio es inestable ya que al menos una de las raíces tendrá parte real positiva.

P3) Considere la ecuación de Van der Pol, dada por:

$$y'' + \mu y'(y^2 - 1) + y = 0, \mu \in \mathbb{R}$$

Convierta esta ecuación en un sistema autónomo y demuestre que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable. ¿Cómo interpreta este hecho?

Solución. Para resolver esto, convertiremos esta ecuación en un sistema haciendo $z = y'$, con lo que obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y' &= z \\ z' &= -\mu z(y^2 - 1) - y \end{cases}$$

Podemos ver que $(y, z) = (0, 0)$ es una solución de la ecuación $y' = 0, z' = 0$ por inspección, por lo que es un punto de equilibrio. Vemos que la ecuación está escrita en la forma $(y, z)' = \vec{F}(y, z)$, por lo que podemos calcular el Jacobiano de la función $\vec{F}$ como sigue:

$$J_{\vec{F}}(y, z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\mu yz - 1 & \mu(1 - y^2) \end{bmatrix}$$

y evaluando en $(0, 0)$:

$$J_{\vec{F}}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}$$

Los valores propios de esta matriz son los ceros del polinomio $-\lambda(\mu - \lambda) + 1 = \lambda^2 - \mu\lambda + 1$, que son $(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4})/2$. Para $\mu < 0$ son ambos negativos, luego la matriz es definida negativa, de modo que el punto de equilibrio es asintóticamente estable. Podemos deducir que en condiciones en que $y \approx 0, y' \approx 0$, el valor de $y(t)$ decaerá con el tiempo, convergiendo a cero.

