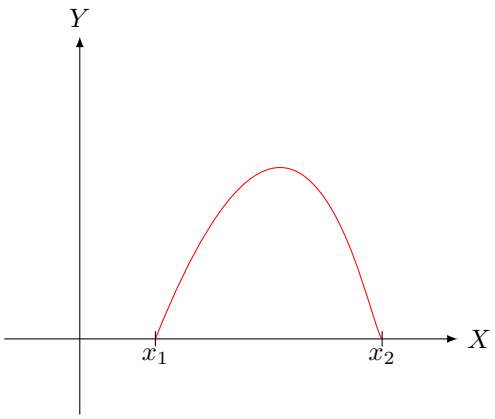
Control 2: Pauta P2

Auxiliares: Álvaro Bustos, Nicolás Torres/Esteban Escorza/Chaparrón Bonaparte
Ayudantes: Carolina Mayol, Matías Yáñez

(a) Por hipótesis, la solución $y(x)$ es no trivial, es decir, $y \not\equiv 0$. Pero $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ es una condición inicial satisfecha por la solución trivial $y \equiv 0$, y por el Teorema de Existencia y Unicidad ésta es la única solución que satisface dicha condición inicial. Así, como $y(x_0) = 0$ y $y \not\equiv 0$, entonces debe ser $y'(x_0) \neq 0$.

(b) Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $y > 0$ en (x_1, x_2), ya que, si $y < 0$, como $-y(x)$ también es solución y tiene los mismos ceros, podemos trabajar con esta nueva función sin problemas. Podemos suponer que $y(x)$ tiene un gráfico similar al siguiente, en el intervalo (x_1, x_2):



Vemos que, como $y(x_1) = 0$ y $y(x) > 0$ para todo x entre x_1 y x_2, la diferencia $y(x) - y(x_1) = y(x) > 0$, de modo que:

$$y'(x_1) = \lim_{x \to 0} \frac{y(x) - y(x_1)}{x - x_1} = \lim_{x \to 0} \frac{y(x)}{x - x_1} \geq 0$$

y como sabemos que $y'(x_1) \neq 0$ (por lo anterior) deducimos que $y'(x_1) > 0$. De manera análoga probamos que $y'(x_2) < 0$; es decir, tienen signos distintos, lo que queríamos probar.

(c) Si tomamos $p(x) = \exp(\int a_1(x)\,dx)$, vemos inmediatamente que $p'(x) = \exp(\int a_1(x)\,dx) \cdot a_1(x) = p(x)a_1(x)$. De este modo, si multiplicamos la ecuación diferencial por $p(x)$ obtenemos:

$$p(x)y'' + \underbrace{p(x)a_1(x)y'}_{p'(x)y'} + \underbrace{p(x)a_0(x)y}_{q(x)y} = 0$$

o bien, recordando que $(f \cdot y')' = f' \cdot y' + f \cdot y''$:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x) \cdot \frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = 0$$

que es lo que queríamos probar.

(d) Por lo que probamos en el item anterior, y bajo las hipótesis anteriores ($y > 0$, etc.), sabemos que:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x) \cdot \frac{dy}{dx}\right) = -q(x)y$$

Como $q(x) = p(x)a_0(x) \leq 0$ en todo $[x_1, x_2]$, vemos que la expresión de la derecha, $-q(x)y$, es mayor o igual que cero. De este modo, obtenemos que:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x) \cdot \frac{dy}{dx}\right) \geq 0 \text{ en } [x_1, x_2]$$

Pero sabemos que $p(x) > 0$ para todo x, de modo que el término entre paréntesis tiene el mismo signo que $y'(x)$. Vemos entonces que $p(x_1)y'(x_1) > 0$, $p(x_2)y'(x_2) < 0$, i.e. $p \cdot y'$ tiene que ser decreciente en alguna parte de (x_1, x_2) (ya que es continua). Más precisamente, por el Teorema del Valor Medio, se tiene que existe un $\xi \in (x_1, x_2)$ para el cual:

$$(p \cdot y')'(\xi) = \frac{p(x_2)y'(x_2) - p(x_1)y'(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$$

ya que el numerador de la fracción anterior es negativo. Esto contradice lo visto previamente, ya que $(p \cdot y')' \geq 0$ en todo (x_1, x_2).

Esta contradicción surge del hecho de asumir que hay al menos dos ceros en I; por lo tanto, no puede haber más de un cero en este intervalo, lo que prueba el resultado. ♠