Guía N°6 Ma26a-01 2005-1

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

PROF. MANUEL DEL PINO; AUXS.: WALDO ARRIAGADA - CLAUDIO MUÑOZ

Departamento de Ingeniería Matemática, FCFM - U. de Chile

Sistemas de EDO's Lineales

1. Resuelva los siguientes sistemas, ya sea calculando su matriz exponencial o bien encontrando sus valores propios y una base de vectores propios normal o generalizada.

$$(a) \quad x' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} x.$$

$$(b) \quad x'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} x.$$

$$(c) \quad x' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

$$(d) \quad x' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}.$$

$$(e) \quad x' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{con } x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(f) \quad \text{Resuelva } x' = Ax, \text{ para } A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & 0 \\ \vdots & 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

2. Encuentre e^{tA} para las siguientes matrices:

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 3 & 5 & 2 \\ -6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(c) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(d) A(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ en los casos:}$$

- i. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$,
- ii. $\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2$.

3. Considere un sistema lineal de la forma $x' = Ax, t \geq 0$, con $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz diagonalizable. Demuestre que si todas las soluciones de dicho sistema son periódicas, y además todas tienen el mismo período, digamos T , entonces el polinomio característico de la matriz A es de la forma $p(\lambda) = (\lambda^2 + T^2)^{n/2} = 0$. (Notar que n tiene que ser un número par).
4. Sea $A(t)$ una matriz simétrica de $n \times n$ con coeficientes continuos en todo $\mathbb{R}$, tal que $A(t)$ es invertible para todo t .
- (a) Demuestre que los valores propios de $A(t)$ son una función continua del tiempo.
 - (b) Considere el sistema:

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

Suponga que existe una constante $\xi > 0$ tal que todo $\lambda_i(t)$ valor propio de $A(t)$ satisface $\lambda_i(t) < -\xi \quad \forall i$. Demuestre que toda solución $x(t)$ de este sistema satisface $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para ello, recuerde que existe una base ortonormal $\{u_i(t)\}_{i=1}^n$ de vectores propios de $A(t)$ respectivamente asociados a $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$. Utilice esto para deducir que:

$$\frac{d}{dt} \|x(t)\|^2 \leq -\xi \|x(t)\|^2$$

5. Resolver usando sistemas de edo's la siguiente ecuación diferencial:

$$y^{(iv)} - 8y'' + 16y = 0.$$

6. Considere el sistema lineal $x'(t) = Ax(t)$ en que la matriz A es antisimétrica (ie, $A^T = -A$). Sean x_0 y x_1 vectores en $\mathbb{R}^n$ y denotemos por $z(t, x_0)$ y $x(t, x_1)$ las soluciones de la ecuación con condiciones iniciales en $t=0$ igual a x_0 y x_1 respectivamente. Demuestre que si $\langle x_0, x_1 \rangle = 0$ entonces

$$\langle z(t, x_0), x(t, x_1) \rangle = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

(ie, si las soluciones comienzan ortogonales permanecen ortogonales).

7. Considere el sistema, de coeficientes variables:

$$x' = A(t)x$$

Donde la matriz $A(t)$ es periódica de período π , esto es $A(t + \pi) = A(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Sea $W(t)$ la matriz fundamental de éste sistema tal que $W(0) = I_{n \times n}$ (la matriz identidad).

- (a) Demuestre que:

$$W(t + \pi) = W(t)W(\pi) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- (b) Suponga que la matriz $W(\pi)$ tiene un valor propio $\lambda = 1$. Muestre que en tal caso el sistema posee una solución $x(t)$ periódica de período π .

8. Considere la ecuación vectorial:

$$x'' + Ax = 0$$

Donde A es una matriz con n valores propios reales y distintos.

(a) Transforme la ecuación a una de la forma:

$$y'' + \Gamma y = 0,$$

por medio de una transformación de la forma $x = Ky$ para una matriz K conveniente.

(b) Encuentre la solución general del nuevo sistema si los primeros r valores propios de A , $1 \leq r < n$ son positivos y los restantes negativos.

(c) Suponga que $\lambda_i > 0 \quad \forall i$. Encuentre las soluciones y_1, y_2 del sistema en y que satisfacen:

$$y_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_1'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_2'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Demuestre que $\|y_1(t)\|^2 + \|y_2(t)\|^2 = n$.

9. Para el sistema

$$\begin{aligned} x' &= A(t)x + b(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) &\text{ dado en } \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

donde $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b(t) \in \mathbb{R}^n$, y sus componentes son funciones continuas para $t \geq 0$.

(a) Si $\Phi(t)$ es la matriz fundamental canónica del sistema, demuestre la siguiente fórmula de Abel generalizada:

$$\det(\Phi(t)) = \exp\left(\int_0^t \text{traza}(A(t)) dt\right)$$

Ind.: Puede usar la siguiente fórmula para la derivada del determinante:

$$\frac{d}{dt} \det M(t) = \sum_{k=1}^d \det M_k(t)$$

donde $M_k(t)$ es la matriz que resulta al derivar la k -ésima fila de $M(t)$ y la linealidad del determinante por filas.

(b) Demuestre que la fórmula anterior generaliza la fórmula de Abel para las EDO lineales de orden n :

$$W(y_1, \dots, y_n) = \exp\left(-\int_0^t a_{n-1}(t) dt\right)$$

donde $a_{n-1}(t)$ es el coeficiente del término de orden $n - 1$ de la EDO normalizada.

10. Sea A una matriz simétrica de $n \times n$ a coeficientes constantes, y supongamos que $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable.

(a) Demostrar que: $[Ay(s)]^t \frac{dy}{ds}(s) = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} ([Ay(s)]^t \cdot y(s))$.

(b) Si " y " satisface la ecuación $y'' + Ay = 0$ demuestre que para alguna constante $C \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\|y'(s)\|^2 + [Ay(s)]^t y(s) = C$$

11. *Equilibrio Marino*. Considere el sistema discreto siguiente:

$$X_{n+1} = AX_n + B_n, \quad n \geq 0$$

X_0 dado en $\mathbb{R}^d$

donde $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $B_n \in \mathbb{R}^d$, $n \geq 0$.

(a) Demuestre que la solución del sistema anterior está dada por:

$$X_n = A^n X_0 + \sum_{j=1}^n A^{n-j} B_{j-1}, \quad n \geq 1.$$

(b) Si $B_n = 0$, $n \geq 0$, y los valores propios de A son estrictamente menores que 1 en módulo, demuestre que $X_n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$ (Considere sólo el caso A diagonalizable).

(c) Suponga que la población de ballenas b , plancton p y temperatura del mar T están regidas por el siguiente sistema discreto, donde n designa el año y $\lambda > 0$ un parámetro de crecimiento:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \lambda b_n + p_n \\ p_{n+1} &= \lambda p_n + T_n \\ T_{n+1} &= \lambda T_n \\ b_0 = 10, \quad p_0 = 100, \quad T_0 = 15. \end{aligned}$$

Resuelva el sistema usando la fórmula que dedujo en el punto a, calculando explícitamente A^n , $n \geq 0$, y determine para qué valores de λ existe el límite cuando $n \rightarrow \infty$ de b_n, p_n y T_n , explicitándolo en cada caso.

Ind.: Puede servirle usar la fórmula del binomio:

$$(M_1 + M_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M_1^k M_2^{n-k},$$

válida si las matrices M_1 y M_2 conmutan.

12. Considere el sistema lineal para $t \geq 0$

$$x' = Ax + bu(t), \quad x(0) = x_0,$$

donde $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $b \in \mathbb{R}^N$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ son constantes y $u(\cdot)$ es una función escalar. Dado $T > 0$, nuestro propósito es encontrar una función $u(t)$, $0 < t < T$ que lleve el estado al reposo en $t = T$, esto es tal que se satisfaga la condición final

$$x(T) = 0. \tag{CF}$$

Suponga que la función u es de la forma (* denota transposición)

$$u(\sigma) = b^* e^{A^*(T-\sigma)} u_0$$

con $u_0 \in \mathbb{R}^N$ un vector constante.

(a) Demuestre que si la matriz

$$M = \int_0^T e^{A\sigma} b b^* e^{A^* \sigma} d\sigma$$

es invertible entonces (CF) se satisface si

$$u_0 = -M^{-1} e^{AT} x_0.$$

(b) Demuestre que $e^{A^* t} = (e^{At})^*$. Esto le facilitará los cálculos que siguen.

(c) Dados $T > 0$, $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y x_0 , determine en cuál de los casos siguientes es posible calcular u_0 por el método anterior. (i) $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, (ii) $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (para simplificar use $\lambda = 0$ en el caso (ii)).