Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesora Salomé Martínez
Semestre de Otoño, 2012

Pauta Auxiliar 4

Auxiliares: Esteban Escorza, Álvaro Bustos.

$\boxed{\text{P1}}$ **P1.a)** Resolvamos la ecuación homogénea $y'' + y' + 3y = 0$, cuyo polinomio característico está dado por $\lambda^2 + \lambda + 3 = 0$ y sus raíces son $\lambda_1 = \frac{-1+i\sqrt{11}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{-1+i\sqrt{11}}{2}$. Luego la base de soluciones está dada por:

$$\left\{ e^{-x} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{11}}{2}x\right), e^{-x} \cos\left(\frac{\sqrt{11}}{2}x\right) \right\}$$

Luego obtendremos la solución particular usando el método de variación de parámetros. Consideramos $y_p = y_1 w_1 + y_2 w_2$, donde y_i son las soluciones l.i obtenidas de la ecuación homogénea y w_i son las soluciones incógnitas, las cuales resuelven el siguiente sistema con la matriz Wroskiana:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1' \\ w_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ xe^x + \operatorname{sen} x \end{bmatrix}$$

Utilizando el método de Kramer se tiene que las soluciones están dadas por:

$$w_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ xe^x + \operatorname{sen} x & y_2' \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2]} = \frac{-y_2(xe^x + \operatorname{sen} x)}{W[y_1, y_2]}$$

$$w_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & xe^x + \operatorname{sen} x \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2]} = \frac{y_1(xe^x + \operatorname{sen} x)}{W[y_1, y_2]}$$

Donde $W[y_1, y_2]$ es el Wroskiano. Finalmente las funciones incógnitas están dadas por:

$$w_1 = \int \frac{y_1(x)(xe^x + \operatorname{sen} x)}{W[y_1, y_2](x)} dx + C$$

$$w_2 = \int \frac{y_2(x)(xe^x + \operatorname{sen} x)}{W[y_1, y_2](x)} dx + D$$

Finalmente reemplazando en $y_p(x) = y_1(x)w_1(x) + y_2(x)w_2(x)$ tenemos la solución particular. Luego la solución general se escribe como $y(x) = y_p + Ay_1(x) + By_2(x)$, donde $y_1 = e^{-x} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{11}}{2}x\right)$ e $y_2 =, e^{-x} \cos\left(\frac{\sqrt{11}}{2}x\right)$. Reemplazando se tiene la solución pedida.

P1.b) Para $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$, suponemos soluciones de la forma $y = x^\alpha$ y la ecuación característica es $\alpha(\alpha - 1) - 2\alpha - 4 = 0$, cuyas raíces son -1 y 4. Finalmente la base de soluciones de la ecuación es $\{x^{-1}, x^4\}$.

P1.c) $x^2y'' + 3xy' + 3y = 0$, la ecuación característica es $\alpha^2 + 2\alpha + 3 = 0$, cuyas raíces son complejas conjugadas. Haciendo el cambio $x = e^u$, $z(u) = y(x)$, obtenemos la siguiente ecuación para $z(u)$:

$$z'' + 2z + 3 = 0$$

Cuya solución general es: $z(u) = Ae^{-u}\cos(\sqrt{2}u) + Be^{-u}\operatorname{sen}(\sqrt{2}u)$. Devolviendo el cambio de variable tenemos la solución pedida: $y(x) = Ax^{-1}\cos(\sqrt{2}\ln x) + Bx^{-1}\operatorname{sen}(\sqrt{2}\ln x)$.

$\boxed{\text{P2}}$ **P2.a)** **1.** Consideremos el caso $\alpha = 0$, luego tenemos que:

$$u'' = cos(\beta t)$$

Si $\beta = 0$ tenemos que $u'' = 1$. Si integramos entre 0 y 1, tenemos $0 = u'(1) - u'(0) = 1$, lo cual es una contradicción. Si $\beta \neq 0$, integrando entre 0 y 1 tenemos que:

$$u'(1) - u'(0) = 0 = \int_0^1 cos(\beta t)dt = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\beta}$$

De lo cual concluimos que $\operatorname{sen}(\beta) = 0$ y luego $\beta = k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$. Verifiquemos que el problema no tiene solución única, tomando la Ecuación original e integrando entre 0 y t, se tiene:

$$u'(t) = \frac{\operatorname{sen}(k\pi t)}{k\pi}$$

Volviendo a integrar tenemos que:

$$u(t) - u(0) = -\frac{\cos(k\pi t)}{(k\pi)^2} + \frac{1}{(k\pi)^2}$$

De esta manera tenemos una familia de soluciones $u(t)$ que resuelven la condición de borde y luego para $\alpha = 0$ no puede haber solución única.

2. Caso $\alpha < 0$. La base de soluciones de la ecuación homogénea estaría dada por $\left\{e^{\sqrt{-\alpha}t}, e^{-\sqrt{-\alpha}t}\right\}$. Notemos que la siguiente solución particular satisface la EDO[1]:

$$u_p(t) = \frac{\cos(\beta t)}{\alpha - \beta^2}$$

Como estamos en el caso $\alpha < 0$ el denominador nunca se anula. Luego la solución general en este caso se escribe como:

$$u(t) = \frac{\cos(\beta t)}{\alpha - \beta^2} + Ae^{\sqrt{-\alpha}t} + Be^{-\sqrt{-\alpha}t}$$

La derivada estaría dada por:

$$u'(t) = -\frac{\beta\operatorname{sen}(\beta t)}{\alpha - \beta^2} + A\sqrt{-\alpha}e^{\sqrt{-\alpha}t} - B\sqrt{-\alpha}e^{-\sqrt{-\alpha}t}$$

Imponemos condiciones de borde. De $u'(0) = 0$, obtenemos que $A = B$ y de $u'(1) = 0$ se tiene que:

$$0 = -\frac{\beta\operatorname{sen}\beta}{\alpha - \beta^2} + A\sqrt{-\alpha}(e^{\sqrt{-\alpha}} - e^{-\sqrt{-\alpha}})$$

Con lo cual podemos despejar la constante A, dada por:

$$A = \frac{\beta\operatorname{sen}\beta}{\sqrt{-\alpha}(e^{\sqrt{-\alpha}} - e^{-\sqrt{-\alpha}})(\alpha - \beta^2)}$$

Con lo que la constante A queda únicamente determinada. Finalmente concluimos que para $\alpha < 0$ siempre **existe** una **única** solución.

3. Caso $\alpha > 0$. Tenemos de inmediato que la solución general se escribe como:

$$u(t) = \frac{\cos(\beta t)}{\alpha - \beta^2} + A\cos(\sqrt{\alpha}t) + B\operatorname{sen}(\sqrt{\alpha}t)$$

Y la derivada es:

$$u'(t) = -\frac{\beta\operatorname{sen}(\beta t)}{\alpha - \beta^2} - A\sqrt{\alpha}\operatorname{sen}(\sqrt{\alpha}t) + B\sqrt{\alpha}\cos(\sqrt{\alpha}t)$$

[1] En realidad, es posible hallar una solución particular mediante el método de variación de parámetros como se hizo en el problema 1 o mediante coeficientes indeterminados, pero tenía planeado dar como hint esta solución particular que es sencilla.

Aquí debemos considerar que $\alpha \neq \beta^2$. Luego imponemos condiciones de borde: $u'(0) = 0 \implies B = 0$. De $u'(1) = 0$ obtenemos que:

$$0 = \frac{\beta \operatorname{sen} \beta}{\alpha - \beta^2} + A\sqrt{\alpha} \operatorname{sen} \sqrt{\alpha}$$

Notemos que para $\operatorname{sen}(\sqrt{\alpha}) \neq 0$ podemos despejar el valor de A, con lo cual concluimos que para $\alpha \neq k^2\pi^2$ con $k \in \mathbb{N}$, tenemos **solución única**.
Si $\alpha = \beta^2$, la ecuación diferencial a resolver es:

$$u'' + \beta^2 u = \cos(\beta t)$$

Notemos que el Wroskiano de la base de soluciones está dado por:

$$\begin{vmatrix} \cos(\beta t) & \operatorname{sen}(\beta t) \\ -\beta \operatorname{sen}(\beta t) & \beta \cos(\beta t) \end{vmatrix} = \beta$$

Suponemos la solución particular en la forma $u_p = \cos(\beta t) w_1 + \operatorname{sen}(\beta t) w_2$ y por método de variación de parámetros, análogo al problema 1 tenemos que:

$$w_1' = -\frac{1}{\beta} \operatorname{sen}(\beta t) \cos(\beta t) \implies w_1 = \frac{\cos^2(\beta t)}{2\beta^2} + C$$

De igual forma:

$$w_2' = \frac{1}{\beta} \cos^2(\beta t) \implies w_2 = \frac{\beta t + \operatorname{sen}(\beta t)\cos(\beta t)}{2\beta^2} + D$$

Luego obtenemos la siguiente solución particular:

$$\frac{\cos^3(\beta t)}{2\beta^2} + \operatorname{sen}(\beta t)\frac{\beta t + \operatorname{sen}(\beta t)\cos(\beta t)}{2\beta^2} = \frac{\cos \beta t + \operatorname{sen}(\beta t)\beta t}{2\beta^2}$$

Como el término $\cos(\beta t)$ es solución de la ecuación homogénea obtenemos una solución particular más simple:

$$u_p(t) = \frac{t \operatorname{sen} \beta t}{2\beta}$$

Y la solución general está dada por:

$$u(t) = \frac{t \operatorname{sen} \beta t}{2\beta} + A\cos(\beta t) + B \operatorname{sen}(\beta t)$$

La derivada está dada por:

$$u'(t) = \frac{\operatorname{sen} \beta t + t\beta \cos(\beta t)}{2\beta} - A\beta \operatorname{sen}(\beta t) + B\beta \cos(\beta t)$$

Imponiendo condiciones de borde: $u'(0) = 0 \implies B = 0$ y de $u'(1) = 0$ tenemos que:

$$0 = \frac{\operatorname{sen} \beta + \beta \cos \beta}{2\beta} - A\beta \operatorname{sen} \beta$$

De lo cual nuevamente obtenemos que si $\operatorname{sen}(\beta) \neq 0$ podemos despejar A y sucede lo mismo que el caso anterior.