

## Pauta Auxiliar 3

Auxiliares: Esteban Escorza, Álvaro Bustos.

**P1** **P1.a)** El polinomio característico de la EDO  $y'' + 6y' - 16y = 0$  está dado por  $\lambda^2 + 6\lambda - 16 = 0$ , cuyas raíces son  $\lambda = 2$  y  $\lambda = -8$ . Así la solución general se escribirá como  $Ae^{2x} + Be^{-8x}$  con  $A, B \in \mathbb{R}$ .

**P1.b)** Para la ecuación de Euler-Cauchy  $x^2y'' + 3xy' + 8y = 0$ . Suponemos soluciones del tipo  $x^\alpha$  y obtenemos la ecuación característica para  $\alpha$ , dada por:

$$\alpha(\alpha - 1) + 3\alpha + 8 = \alpha^2 + 2\alpha + 8 = 0$$

La cual tiene soluciones complejas conjugadas. Así consideramos el cambio de variable  $x = e^u$ ,  $z(u) = y(x)$  y obtenemos la EDO:

$$z'' + 2z' + 8 = 0$$

Que es una ecuación lineal de orden 2 a coeficientes constantes, cuya incógnita es  $z$  y variable independiente  $u$ . Las soluciones de dicha ecuación están dadas por

$$z(u) = Ae^{-u} \cos(\sqrt{7}u) + Be^{-u} \sin(\sqrt{7}u)$$

Finalmente devolviendo el cambio de variable (pues  $u = \ln x$ ) tenemos la solución general:

$$y(x) = Ax^{-1} \cos(\sqrt{7} \ln x) + Bx^{-1} \sin(\sqrt{7} \ln x)$$

Con  $A, B \in \mathbb{R}$ .

**P1.c)** La ecuación característica de  $y''' - 4y'' + 9y = 0$  está dada por  $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 9 = 0$ . Note que  $\lambda = 3$  es una raíz del polinomio el cual puede ser factorizado entonces como:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 9 = (\lambda - 3)(\lambda^2 - \lambda - 3) = 0$$

Luego las raíces restantes son:  $\frac{1 - \sqrt{13}}{2}$ ,  $\frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ . Finalmente la solución general se escribe como:

$$y(x) = Ae^{3x} + Be^{\frac{1-\sqrt{13}}{2}x} + Ce^{\frac{1+\sqrt{13}}{2}x}$$

Con  $A, B, C \in \mathbb{R}$ .

**P1.d)** Para la ecuación  $y'' + 4y - 5 = y'' + 4(y - \frac{5}{4}) = 0$  realizamos el cambio de variable  $z = y - \frac{5}{4}$  de modo que  $y'' = z''$  y obtenemos la siguiente EDO:

$$z'' + z = 0$$

Cuya solución está dada por:

$$z(x) = A \sin(x) + B \cos(x)$$

Devolviendo el cambio de variable:

$$y(x) = A \sin(x) + B \cos(x) + \frac{5}{4}$$

La derivada estaría dada por:

$$y'(x) = A \cos(x) - B \sin(x)$$

Luego imponemos condiciones iniciales. De  $y(0) = 1$  obtenemos  $B + \frac{5}{4} = 1$ , con lo cual  $B = -\frac{1}{4}$ , de  $y'(0) = 2$  obtenemos  $A = 2$ . Finalmente la solución del problema de valor inicial es:

$$y(x) = 2 \sin(x) - \frac{1}{4} \cos(x) + \frac{5}{4}$$

**P2** Para la EDO  $y'' + \alpha y = 0$ , el polinomio característico está dado por  $\lambda^2 + \alpha = 0$ , por lo cual debemos considerar 3 casos.

Consideremos  $\alpha = 0$ , con lo cual la EDO es  $y'' = 0$ . Las soluciones serían de la forma  $y(x) = Ax + B$ . Imponiendo condiciones de borde tenemos que  $y(0) = 0 \implies B = 0$  e  $y(1) = 0 \implies A = 0$ , de donde obtenemos la solución trivial  $y \equiv 0$ .

Para  $\alpha < 0$ , las soluciones son de la forma:

$$y(x) = Ae^{\sqrt{-\alpha}x} + Be^{-\sqrt{-\alpha}x}$$

Imponiendo la condición de borde  $y(0) = 0, y(1) = 0$  tenemos que las constantes  $A, B$  satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ Ae^{\sqrt{-\alpha}} + Be^{-\sqrt{-\alpha}} &= 0 \end{aligned}$$

Como esperamos soluciones no triviales imponemos que el siguiente determinante sea determinante sea nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\alpha}} & e^{-\sqrt{-\alpha}} \end{vmatrix} = 0$$

Lo cual es equivalente a decir que  $e^{\sqrt{-\alpha}} = e^{-\sqrt{-\alpha}}$ , lo cual se alcanza cuando  $\alpha = 0$ . Concluimos que en este caso solo hay soluciones triviales.

Para  $\alpha > 0$ , las soluciones son de la forma:

$$y(x) = A \sin(\sqrt{\alpha}x) + B \cos(\sqrt{\alpha}x)$$

Luego se tiene que  $y(0) = 0 \implies B = 0$  y la solución es simplemente de la forma:

$$y(x) = A \sin(\sqrt{\alpha}x)$$

Consideramos el hecho de que  $y(1) = 0$  y obtenemos que:

$$A \sin(\sqrt{\alpha}) = 0$$

Si  $A = 0$  obtendríamos nuevamente soluciones triviales y así imponemos que  $\sin(\sqrt{\alpha}) = 0$ , lo cual implica que  $\sqrt{\alpha} = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Finalmente para  $\alpha$  de la forma  $\alpha = k^2\pi^2$  con  $k \in \mathbb{N}$  se obtienen soluciones no triviales. Finalmente para la EDO:  $y'' + k^2\pi^2 y = 0$  con condición de borde  $y(0) = 0, y(1) = 0$ , quedan determinadas de la forma:

$$y(x) = A \sin(k\pi x)$$

Donde tenemos una familia de soluciones que resuelven el problema de valor inicial y para ningún valor de  $k$ , la solución es única.

**P3** **P3.a)** Notemos que la EDO  $y'' + y = 0$  es una ecuación diferencial lineal de orden 2 y la condición inicial son los valores de  $y(0), y'(0)$ . Luego, por **Teorema de Existencia y Unicidad** podemos asegurar que la solución está bien definida, pues existe una **única** solución del problema.

**P3.b)** Probaremos la igualdad usando el **Teorema de Existencia y Unicidad**. Fijemos  $t$ , pues estaremos evaluando básicamente cualquier traslación horizontal de la función  $s(x)$ . Note que en  $t = 0$  la función adquiere el valor  $s(t)$ . Además  $(s(x+t))' = s'(x+t)$  y evaluando en  $t = 0$ , la derivada es naturalmente  $s'(t)$ . Dado que  $s(x)$  es solución de la EDO, se cumple que  $s''(x) = -s(x)$ . Luego:

$$(s(x+t))'' = -s''(x+t)$$

Con lo cual  $s(x+t)$  resuelve también la EDO.

Para  $s(x)s'(t) + s'(x)s(t)$ , note que evaluada en  $x = 0$  es igual a  $s(t)$ , pues sabemos que  $s(0) = 0, s'(0) = 1$ . Dado que  $t$  es fijo, la derivada de la expresión anterior está dada por:

$$s'(x)s'(t) - s(x)s(t)$$

Donde se ha usado que  $s'' = -s$ . Además note que la expresión obtenida evaluada en  $x = 0$  es justamente  $s'(t)$ , por la condición inicial que satisface  $s(x)$ . Derivando otra vez, tenemos que:

$$-s(x)s'(t) - s'(x)s(t)$$

Es decir, al derivar 2 veces  $s(x)s'(t) + s'(x)s(t)$  hemos obtenido su inverso aditivo.

Finalmente note que  $s(x+t)$  y  $s(x)s'(t) + s'(x)s(t)$  satisfacen la misma Edo  $y'' = -y$ , con la misma condición inicial  $y(0) = s(t), y'(0) = s'(t)$ . Luego por **Teorema de Existencia y Unicidad** se tiene que las expresiones son equivalentes.

**P3.c)** Para probar que  $s(x)$  es impar, probaremos que  $-s(-x)$  también es solución del problema de valor inicial. Por regla de la cadena se tiene que:

$$\begin{aligned} (-s(-x))' &= s'(-x) \\ (-s(-x))'' &= -s''(-x) = s(-x) \end{aligned}$$

Por lo que  $-s(-x)$  también resuelve la misma EDO. Además satisface la misma condición inicial, pues  $-s(0) = 0, s'(0) = 1$ . Luego por **Teorema de existencia y unicidad** tenemos que  $s(x) = -s(-x)$  y concluimos que la función es impar.

Probemos que  $s'(x)$  también resuelve la EDO, en efecto:

$$(s'(x))'' = (s''(x))' = (-s(x))' = -s'(x)$$

Además por lo demostrado anteriormente se tiene que:

$$s(x) = -s(-x) \implies s'(x) = (-s(-x))' = s'(-x)$$

Por lo tanto  $s'(x)$  es par.

**P3.d)** Dado que  $s(x), s'(x)$  son solución de la EDO, tenemos que:

$$(s(x)^2 + s'(x)^2)' = 2s(x)s'(x) + 2s'(x)s''(x) = 2s(x)s'(x) - 2s'(x)s(x) = 0$$

Por lo que concluimos que  $(s(x))^2 + (s'(x))^2$  es constante. Evaluando la expresión en  $x = 0$ , se obtiene que  $s(0)^2 + s'(0)^2 = 1$  y por lo tanto  $s(x)^2 + s'(x)^2 = 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**P3.e)** En el curso de calculo diferencial se vio que la serie dada por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

es absolutamente convergente y su derivada corresponde a la serie de los términos derivados. Luego se obtiene que:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Dado que el primer término de la serie derivada es una constante, al derivar por segunda vez obtenemos que:

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2(n+1)-1}}{(2(n+1)-1)!} = - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -f(x)$$

En donde se ha realizado un cambio de índice. De esta forma, hemos concluido que  $f(x)$  satisface la EDO, además de las series es directo que  $f(0) = 0$  y  $f'(0) = 1$ . Finalmente por **Teorema de Existencia y Unicidad** tenemos que la serie es la única solución del problema de valor inicial.