Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesora Salomé Martínez
Semestre de Otoño, 2012

Auxiliar 5

Auxiliares: Álvaro Bustos, Esteban Escorza
Ayudantes: Carolina Mayol, Matías Yáñez

P1 Resuelva las siguientes ecuaciones. Utilice los métodos para ecuaciones no homogéneas vistos en clases si es necesario.

P1.a) $y'' + 4y' + 2y = xe^{-2x}$

P1.b) $y'''' - 10y''' + 35y'' - 50y' + 24y = x^2$

P1.c) $y''' - 5y'' - y' + 5 = x^3 - 3x + 1$

P1.d) $x^3y''' - 2x^2y'' - 17xy' - 7y = 0$

P2 Considere y_1 e y_2 dos funciones definidas en un intervalo I, soluciones de las ecuaciones:

$$y_1'' + p_1(x)y_1 = 0,\; y_2'' + p_2(x)y_2 = 0$$

con $p_1(x) > p_2(x)$ $(\forall x \in I)$.

P2.a) *(Teorema de comparación de Sturm)* Demuestre que, dadas las condiciones anteriores, entre dos ceros cualesquiera de y_2 hay **al menos** un cero de y_1.

P2.b) Pruebe que toda solución no trivial de la ecuación:

$$y'' + p(x)y = 0$$

tiene, a lo más, un cero en todo intervalo I en que $p(x) < 0$.

P3 Considere la siguiente ecuación diferencial, conocida como **ecuación de Bessel**:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0,\; \alpha \in \mathbb{R}$$

Las soluciones de esta ecuación se denominan **funciones de Bessel**[1] de orden α.

P3.a) Demuestre que, si J_n, Y_n son soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel de orden n (con $n \in \mathbb{Z}$) , entre dos ceros de J_n hay exactamente un cero de Y_n y viceversa.

P3.b) Sea J_0 una función de Bessel de orden cero (no trivial) que satisface[2] las condiciones iniciales: $J_0(0) = 1$, $J_0'(0) = 0$. Pruebe que J_0' satisface la ecuación de Bessel de orden 1 (y así, definimos J_1 como $-J_0'$). ¿Puede generalizarse este resultado?

P3.c) Demuestre que la distancia entre dos ceros consecutivos de J_0 es siempre menor que π. (**Sugerencia**: use el cambio de variable $y = u/\sqrt{x}$ y piense en lo visto previamente. ¿Qué ocurre con las soluciones de $y'' + y = 0$?).

P3.d) Encuentre una solución de la ecuación de Bessel en términos de funciones elementales si $\alpha = \frac{1}{2}$.

[1] Puede probarse que, en general, éstas no pueden expresarse de forma finita como combinaciones de polinomios, funciones exponenciales, trigonométricas y sus inversas, es decir, éstas son funciones no elementales.

[2] Denominamos a J_0 **función de Bessel de primera especie de orden cero**.