Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesora Salomé Martínez
Semestre de Otoño, 2012

Auxiliar 3

Ecuaciones diferenciales de segundo orden y **Teorema de Existencia y Unicidad**.
Auxiliares: Esteban Escorza, Álvaro Bustos.
Ayudantes: Carolina Mayol, Matías Yáñez.

P1 Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

P1.a) $y'' + 6y' = 16y$

P1.b) $x^2y'' + 3xy' + 8y = 0$

P1.c) $y''' - 4y'' + 9y = 0$

P1.d) $y'' + 4y = 5$ con $y(0) = 1, y'(0) = 2$

P2 Considere la ecuación:

$$y'' + \alpha y = 0$$

Con la siguiente condición de borde:

$$y(0) = 0$$
$$y(1) = 0$$

P2.a) Determine para qué valores de α la ecuación tiene soluciones no triviales.

P2.b) ¿En qué caso la solución es única?

P3 Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' + y = 0 \tag{1}$$

Suponga que usted no conoce las funciones trigonométricas $\operatorname{sen}(x), \cos(x)$ y se propone una definición alternativa. Defiremos $s(x) = \operatorname{sen}(x)$ como la solución de la ecuación (1), que satisface la condición inicial:

$$s(0) = 0$$
$$s'(0) = 1$$

P3.a) Verifique que la solución $s(x)$ constituye una función bien definida.

P3.b) Pruebe que $\forall x, t \in \mathbb{R}$ se cumple que $s(x + t) = s(x)s'(t) + s(t)s'(x)$

P3.c) Demuestre que $s(x)$ es una función impar. Además pruebe que $s'(x)$ también es solución de (1) y es una función par.

P3.d) Pruebe que $\forall x \in \mathbb{R}$ se tiene que: $s(x)^2 + s'(x)^2 = 1$

P3.e) Demuestre que la función definida por la serie:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Es solución de (1) con la misma condición inicial descrita anteriormente, luego concluya.
Indicación principal: Utilice el **Teorema de Existencia y Unicidad**.