Pauta P2 Control 1 MA2601-2 Otoño-2012

Profesora: Salomé Martínez
Auxiliares: Alvaro Bustos y Nicolas Torres
Ayudates: Carolina Mayol y Matias Yañez

P2) Considere la ecuacion:

$$y' = f(y)$$

Con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funcion periodica, de periodo $p > 0$, con $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, y $f(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Sea $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una solucion de la ecuacion.

a)Demuestre que y es creciente, que $y(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ y que $y(x) \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$. Indicacion: Demuestre que si $c = min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ entonces $y(x_1) - y(x_2) > c(x_1 - x_2)$ para todo $x_1 > x_2$ y a partir de esto concluya.

Solucion: Para demostrar que y es creciente debemos notar que su derivada es la funcion f, como $f > 0$ en todo su dominio, tenemos que y sera creciente.
Como y es derivable y su derivada es continua (existe f y f'), tenemos que por Teorema del valor medio:

$$\frac{y(x_1) - y(x_2)}{x_1 - x_2} = y'(\xi) = f(y(\xi))$$

Con $\xi \in (x_2, x_1)$, como $f(x) > c$ $\forall x \in \mathbb{R}$, tenemos que $f(y(\xi)) > c$, luego

$$\frac{y(x_1) - y(x_2)}{x_1 - x_2} = f(y(\xi)) \Rightarrow \frac{y(x_1) - y(x_2)}{x_1 - x_2} > c$$

De esto concluimos que $y(x_1) - y(x_2) > c(x_1 - x_2)$. Si tomamos $x_1 = x$ $\forall x > x_2 \in \mathbb{R}$

$$y(x) > y(x_2) + c(x - x_2)$$

Luego, si $x \to \infty$ se tedra que $y(x) > \infty \Rightarrow y(x) \to \infty$. De la misma manera si tomamos $x_2 = x$ $\forall x_1 > x \in \mathbb{R}$

$$y(x) < y(x_1) - c(x_1 - x)$$

Si $x \to -\infty$ se tedra que $y(x) < -\infty \Rightarrow y(x) \to -\infty$

b)Pruebe que existe x_0 tal que $y(x_0) = p$. Indicacion: Use el teorema del valor intermedio.

Solucion: Sea $h(x) = y(x) - p$, como y es continua porque existe su derivada, se tedra por composicion de funciones que h es continua, ademas $h(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ y que $h(x) \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$. Luego por TVI, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $h(x_0) = 0$

$$h(x_0) = 0 \Rightarrow y(x_0) - p = 0$$

Autor: Matias Yañez Quezada.
matias.yanez@ug.uchile.cl

c) Suponga que la solucion satisface $y(0) = 0$. Demuestre que

$$x_0 = \int_0^p \frac{1}{f(x)} dx$$

y que $y(x + x_0) = y(x) + p$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Indicacion: Para la segunda parte, use el teorema de existencia y unicidad.

Solucion: Resolviendo la EDO

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \Rightarrow \frac{1}{f(y)} \frac{dy}{dx} = 1$$

integrando respecto a x tenemos que:

$$\int_0^{x_0} \frac{1}{f(y)} \frac{dy}{dx} dx = \int_0^{x_0} 1 dx \Rightarrow \int_{y(0)=0}^{y(x_0)=p} \frac{1}{f(y)} dy = \int_0^{x_0} dx$$

$$\int_0^p \frac{1}{f(y)} dy = x_0$$

Para demostrar que $y(x + x_0) = y(x) + p$, lo podemos hacer mostrando que $w(x) = y(x + x_0) - p$ tambien es solucion de la EDO, y por el teorema de existencia y unicidad se tendra que $y(x) = w(x)$.
Tenemos que $w'(x) = y'(x + x_0)$ y que $f(w(x)) = f(y(x + x_0) - p) = f(y(x + x_0))$ (notar la periodicidad de f), como y es solucion de la EDO, se tendra:

$$y'(x + x_0) = f(y(x + x_0)) \Rightarrow w'(x) = f(w(x))$$

Lo que muestra que $w(x)$ satisface la EDO.

Ademas $w(0) = y(0 + x_0) - p = y(x_0) - p = 0 \Rightarrow w(0) = 0$, es decir, $w(x)$ cumple las condiciones iniciales, en virtud del teorema de existencia y unicidad, se tiene que $w(x) = y(x)$, por lo tanto:

$$y(x + x_0) - p = y(x) \Rightarrow y(x + x_0) = y(x) + p$$

Autor: Matias Yañez Quezada.
matias.yanez@ug.uchile.cl