Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesora Salomé Martínez
Semestre de Otoño, 2012

Pauta Control 1

Auxiliares: Esteban Escorza, Álvaro Bustos
Ayudantes: Carolina Mayol, Matías Yáñez

$\boxed{\text{P1}}$ $\boxed{\text{P2}}$ $\boxed{\text{P3}}$ Considere la siguiente edo:

$$N'(t) = a(t)N(t)$$

Donde $a(t)$ es una función continua y T-periódica.
P3.a) Dado que es una ecuación en variables separables, suponiendo soluciones no nulas, se tiene que:

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = a(t)$$

Integrando entre t y $t + T$, obtenemos que:

$$\int_t^{t+T} \frac{N'(s)}{N(s)} ds = \int_t^{t+T} a(s)ds$$

Como se vio en la auxiliar, usando el hecho de que $a(t)$ es periódica:

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+T} a(s)ds &= \int_t^{T} a(s)ds + \int_T^{t+T} a(s)ds \\
&= \int_t^{T} a(s)ds + \int_T^{t+T} a(s-T)ds = \int_t^{T} a(s)ds + \int_0^{t} a(s)ds \\
&= \int_0^{T} a(s)ds = \bar{a}T
\end{aligned}$$

De esta forma:

$$\int_t^{t+T} \frac{N'(s)}{N(s)} ds = \bar{a}T$$

Dado que la función $N(t) > 0$, entonces:

$$\ln(N(t+T)) - \ln(N(t)) = \ln\left(\frac{N(t+T)}{N(t)}\right) = \bar{a}T$$

Finalmente tomando exponencial a ambos lados concluimos que:

$$N(t+T) = N(t)e^{\bar{a}T}$$

Alternativamente podría determinarse la solución general de la EDO y demostrar que evaluada en $t + T$ satisface la identidad pedida, usando el mismo truco visto en clase auxiliar.
P3.b) Sea N una solución de la edo anterior y $N(0) > 0$. Dado que es una edo lineal de primer orden, por

Teorema de existencia y unicidad, tenemos que $N(t)$ es una solución NO identicamente nula. Usando la indicación escribimos $t = s + kT$, con $s \in (0, T),\ k \in \mathbb{Z}$ y aplicando la fórmula anterior tenemos que:

$$N(t) = N(s + kT) = N\left((s + (k-1)T) + T\right) = N(s + (k-1)T)e^{\bar{a}T}$$

Si la aplicamos nuevamente en el término $N(s + (k-1)T)$, se tiene que:

$$N(s + (k-1)T)e^{\bar{a}T} = N(s + (k-2)T + T)e^{\bar{a}T} = N(s + (k-2)T)\left(e^{\bar{a}T}\right)^2$$

De esta forma si usamos recursivamente la fórmula obtenemos finalmente que:

$$N(t) = N(s + kT) = N(s)\left(e^{\bar{a}T}\right)^k$$

Luego, decir $t \to \infty$ es equivalente a decir $k \to \infty$ y así tenemos 2 casos:

$$\text{Si } \bar{a} > 0 \implies \left(e^{\bar{a}T}\right)^k \to \infty \text{ si } k \to \infty.$$
$$\text{Si } \bar{a} < 0 \implies \left(e^{\bar{a}T}\right)^k \to 0 \text{ si } k \to \infty.$$

Dado que s es fijo, se concluye el resultado pedido:

$$\text{Si } \bar{a} > 0 \implies N(t) \to \infty \text{ si } t \to \infty.$$
$$\text{Si } \bar{a} < 0 \implies N(t) \to 0 \text{ si } t \to \infty.$$

P3.c) Dado $b > 0$, tenemos la siguiente EDO lineal de primer orden NO-homogénea:

$$N'(t) - a(t)N(t) = b$$

Multiplicamos por el factor integrante $\mu(t) = e^{-\int_0^t a(s)ds}$ y obtenemos que:

$$\left(N(t)e^{-\int_0^t a(s)ds}\right)' = be^{-\int_0^t a(s)ds}$$

Integrando entre 0 y T se tiene que:

$$N(T)e^{-\bar{a}T} - N(0) = b\int_0^T e^{-\int_0^t a(s)ds}dt$$

De esta forma:

$$N(T) = e^{\bar{a}T}\left(N(0) + b\int_0^T e^{-\int_0^t a(s)ds}dt\right)$$

Usando la condición inicial:

$$N(0) = \frac{b}{e^{-\bar{a}T} - 1}\int_0^T e^{-\int_0^t a(s)ds}dt$$

Finalmente:

$$N(T) = be^{\bar{a}T}\int_0^T e^{-\int_0^t a(s)ds}dt\left(\frac{1}{e^{-\bar{a}T} - 1} + 1\right) = be^{\bar{a}T}\int_0^T e^{-\int_0^t a(s)ds}dt\left(\frac{e^{-\bar{a}T}}{e^{-\bar{a}T} - 1}\right) = N(0)$$

Con lo que $N(0) = N(T)$. Note que que si $N(t)$ es solución de la EDO, entonces $N(t+T)$ también lo es, en efecto:

$$(N(t+T))' = N'(t+T) = a(t+T)N(t+T) + b = a(t)N(t+T) + b$$

Como es una EDO lineal de primer orden No-homogénea, satisface la condición de Lipschitz en su variable N. Luego, dado que $N(t)$ y $N(t+T)$, resuelven la misma EDO con la misma condición inicial, entonces por **Teorema de existencia y unicidad** se cumple que $N(t) \equiv N(t+T)$ y la solución es periódica.

P3.d) Sabemos que la solución general $N(t)$, de la EDO no homogénea se escribe como la suma de una solución particular, en este caso $\hat{N}(t)$, y una solución homogénea $h(t)$, de modo que:

$$N(t) = \hat{N}(t) + h(t) \implies |h(t)| = |N(t) - \hat{N}(t)|$$

Si $\bar{a} < 0$, por la parte b tenemos que $|h(t)| \to 0$ si $t \to \infty$, lo cual implica que $|N(t) - \hat{N}(t)| \to 0$. El resultado es el mismo si $h(0) = N(0) - \hat{N}(0)$ es mayor o menor que 0, pues tomamos valor absoluto y si $N \equiv \hat{N}$ es trivial.
Si $\bar{a} > 0$ y $N \not\equiv \hat{N}$, entonces usamos la fórmula anterior. Si $N(t) = \hat{N}(t) + h(t)$, tenemos que por la parte b: $|h(t)| \to \infty$ si $t \to \infty$. Además dado que $\hat{N}(t)$ es periódica y continua,entonces es acotada y por lo tanto $|N(t)| \to \infty$ si $t \to \infty$.