EDO: Pauta Problemas pendientes

Auxiliares: Esteban Escorza, Álvaro Bustos

$\boxed{\text{P1}}$ $(1+x^2y^2)y+(xy-1)^2xy'=0$. Usando el Hint $w=xy \implies y=\frac{w}{x} \implies y'=\frac{w'x-w}{x^2}$. Así obtenemos que:

$$\begin{aligned}
&\implies (1+w^2)\frac{w}{x}+(w-1)^2x\frac{w'x-w}{x^2}=0\\
&\implies (1+w^2)w+(w-1)^2(w'x-w)=0
\end{aligned}$$

Despejando $w'x$, obtenemos que:

$$w'x=\frac{-2w^2}{(w-1)^2}$$

Que es una ecuación de variables separables, la cual tiene como solución trivial $w\equiv 0 \implies y\equiv 0$. En otro caso tenemos que:

$$\begin{aligned}
\implies \frac{w'(w-1)^2}{w^2} &= -\frac{2}{x}\\
\implies \int\frac{(w-1)^2}{w^2}dw &= -\int\frac{2}{x}=-2\ln|x|+C\\
\implies \int\frac{(w^2-2w+1)}{w^2}dw &= \int\left(1-\frac{2}{w}+\frac{1}{w^2}\right)dw=-2\ln|x|+C\\
\implies w-2\ln|w|-\frac{1}{w} &= -2\ln|x|+C
\end{aligned}$$

Reemplazando $w=xy$, obtenemos la solución de forma implícita.

$$xy-2\ln|xy|-\frac{1}{xy}=-2\ln|x|+C$$

$\boxed{\text{P2}}$ P2 Auxiliar 1. Recordemos el desarrollo de serie de la exponencial:

$$e^y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{k!}$$

Usando lo anterior, pero para $-y$, obtenemos los desarrollos de e^{-y} en primer y segundo orden:

$$T_1=1-y,\ T_2=1-y-\frac{y^2}{2}$$

Con lo cual resolvemos las siguientes edos en variables separables:

$$y' = e^{-y}$$
$$y' = 1 - y$$
$$y' = 1 - y + \frac{y^2}{2}$$

Todas con condición inicial $y(0) = 0$. Resolvamos la primera:

$$y' = e^{-y} \implies y'e^y = 1 \implies \int_0^x y'e^y dx = x \implies e^y - 1 = x$$

Así la solución es $y(x) = \ln(x+1)$, la cual tiene como dominio $(-1, \infty)$. Determinemos la solución de la segunda:

$$y' = 1 - y \implies \frac{y'}{1-y} = 1 \implies \int_0^x \frac{y'}{1-y} dx = x \implies -\ln|y-1| = x$$

Así la solución que satisface la condición inicial es $y(x) = 1 - e^{-x}$, cuyo dominio es $\mathbb{R}$. Resolvamos la tercera:

$$y' = 1 - y + \frac{y^2}{2} \implies \int_0^x \frac{1}{1 - y + \frac{y^2}{2}} dy = x \implies \int_0^x \frac{2y'}{(y-1)^2 + 1} dx = x$$

Resolviendo la primitiva tenemos que:

$$\int_0^x \frac{2}{(y-1)^2+1} dy = 2\arctan(y-1) + \frac{\pi}{4} = x$$

Con lo cual las solución está dada por $y(x) = 1 + \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$, función que posee asíntotas periódicamente. Por lo tanto las soluciones no tienen el mismo intervalo de definición.
La primera y segunda solución tienen un cero solamente en $x = 1$, mientra que la tercera, dada su periodicidad, tiene infinitos ceros. Calculemos ahora las segundas derivadas.

$$(\ln(x+1))'' = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$$

Por lo que la primera solución siempre es cóncava. Calculemos ahora:

$$(1 - e^{-x})'' = -e^{-x} < 0$$

Así, la segunda solución preserva la concavidad. Veamos qué sucede con la tercera solución:

$$\left(1 + \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right)'' = -\frac{\cos x}{(1 + \operatorname{sen} x)^2}$$

Función que cambia de signo y por ende no conserva la concavidad.