

Pauta: Auxiliar 2

Auxiliares: Álvaro Bustos, Esteban Escorza

P1 Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

P1.a) $y = (3y^2 + 2x - 2)y'$

Para esta ecuación, haremos el siguiente cambio: consideraremos x como la variable dependiente e y como la independiente, y utilizaremos la relación (consecuencia directa de la regla de la cadena):

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)} \quad (1)$$

De este modo, se tiene que la ecuación anterior se reduce a:

$$\begin{aligned} yx' &= 3y^2 + 2x - 2 \\ x' - 2\frac{x}{y} &= 3y - \frac{2}{y} \end{aligned}$$

Esta es una ecuación diferencial lineal. Podemos resolver para la ecuación homogénea subyacente considerándola como ecuación de variables separables:

$$\begin{aligned} \frac{x'_h}{x_h} &= \frac{2}{y} \\ \ln(|x_h|) &= \ln(|y^2|) + \ln(|c|) \\ x_h &= cy^2 \end{aligned}$$

Ahora estamos en condiciones de usar el método de variación de parámetros. Necesitamos encontrar una solución cualquiera x_p de (1), ya que todas las demás soluciones se obtienen sumando una solución de la ecuación homogénea a x_p . Para encontrar dicha solución, asumiremos que $x_p = \mu \cdot x_h$, de modo que $x'_p = \mu'x_h + \mu x'_h$; reemplazando en la ecuación anterior y eliminando términos obtenemos la relación:

$$\mu'x_h = 3y - \frac{2}{y}$$

Como no especificamos qué solución era x_h , podemos tomar $c = 1$, de modo que obtenemos:

$$\mu' = \frac{3}{y} - \frac{2}{y^3} \implies \mu = 3\ln(|y|) + \frac{1}{y^2}$$

$$x(y) = x_p(y) + x_h(y) = 3y^2 \ln(|y|) + 1 + cy^2$$

P1.b) $3(1 + x^2)y' = 2xy(y^3 - 1)$

(Ecuación de Bernoulli)

La ecuación de Bernoulli es una ecuación de la forma: $y' + P(x)y = f(x)y^n$; Hacer el cambio de variable $z = y^{1-n}$ la convierte en una ecuación lineal de primer orden. En este caso, hacer $z = y^{-3}$ reduce la ecuación a la forma:

$$(1 + x^2)z' + 2xz = -2x \quad (2)$$

Para resolver la ecuación (2), vemos que la ecuación homogénea subyacente es una ecuación de variables separables:

$$\begin{aligned} \frac{z'_h}{z_h} &= -\frac{2x}{1+x^2} \\ \ln(|z_h|) &= \ln(|c|) - \ln(|1+x^2|) \\ z_h &= \frac{c}{1+x^2} \end{aligned}$$

Podemos encontrar una solución particular mediante variación de parámetros, con lo que obtenemos la solución general:

$$z(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{y(x)}} = \frac{c}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^2} \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)$$

P1.c) $y' = 1 - x - y + xy^2$

(Ecuación de Ricatti)

Por inspección, vemos inmediatamente que $y \equiv 1$ es una solución de la ecuación. Recordemos que la ecuación de Ricatti, si se conoce una solución $y_p(x)$ de ésta, se resuelve mediante el cambio de variable $y(x) = y_p(x) + \frac{1}{z(x)}$; de este modo, haciendo $y = 1 + \frac{1}{z}$ obtenemos que:

$$\begin{aligned} -\frac{z'}{z^2} &= 1 - x - \left(1 + \frac{1}{z}\right) + x \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2}\right) \\ z' &= -z + 2xz - x \\ z' + (1 - 2x)z &= -x \end{aligned}$$

La ecuación homogénea subyacente tiene por solución $z_h(x) = ce^{(x^2-x)}$. Al tratar de buscar una solución particular de esta ecuación (por el método de variación de parámetros u otros) aparece la integral indefinida:

$$\int e^{x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erf}(ix) + C$$

La función $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ es una función no elemental, es decir, no puede expresarse como combinación de polinomios, funciones trigonométricas, exponenciales y logaritmos. Por lo tanto, consideraremos el problema resuelto en este punto, ya que no disponemos de herramientas para hacer un análisis más completo de la función solución.

P1.d) $xy' - y = e^{y'}$

(Ecuación de Clairaut)

La ecuación de Clairaut es de la forma general $y = f(y')$. El método de resolución de ecuaciones de esta forma consiste en derivar ambos lados de la igualdad, lo que nos permitirá despejar y' y resolver. En este caso:

$$\begin{aligned} y &= xy' - e^{y'} \\ y' &= y' + xy'' - e^{y'} y'' \\ y''(e^{y'} - x) &= 0 \end{aligned}$$

De esto deducimos que $y'' = 0$ o $e^{y'} = x \implies y' = \ln(x)$. En el primer caso, tenemos soluciones de la forma $y = a + bx$; reemplazando en la ecuación original obtenemos que $bx - (a + bx) = e^b \implies -a = e^b$, de modo que se obtienen soluciones de la forma $y = -e^b + bx$, $b \in \mathbb{R}$. En el segundo caso, integrando obtenemos soluciones de la forma $y = x \ln(|x|) - x + c$, con c constante; reemplazando en la ecuación original confirmamos que cuando $c = 0$ ésta es efectivamente una solución de la ecuación. Es pertinente hacer dos observaciones:

1. Como en todas las ecuaciones diferenciales, es recomendable comprobar las soluciones obtenidas mediante los métodos de resolución, reemplazándolas en la ecuación original para obtener una identidad. Vimos en particular en este caso que algunas de las soluciones obtenidas no satisfacían la ecuación original, como $y = 1 + x$ o $y = x \ln(|x|) - x + 1$, por lo que en el caso de la ecuación de Clairaut es muy necesario efectuar tal comprobación.
2. Vemos también que esta ecuación **no** satisface el Teorema de Existencia y Unicidad. Las soluciones de esta ecuación son una familia de rectas, $y = -e^b + bx$, que resultan ser las tangentes a otra solución «extraña», $x \ln(|x|) - x$, lo que ocasiona un comportamiento patológico de las soluciones.

P1.e) $y'' + 2y' + 2y = 1$

Mediante una simple inspección vemos que la función constante $y \equiv \frac{1}{2}$ es solución de la ecuación. Por lo tanto, solamente debemos preocuparnos de resolver la ecuación homogénea $y'' + 2y' + 2y = 0$. Vemos que la variable independiente x no aparece en la ecuación. Por lo tanto, podemos considerar a y' como la variable dependiente e y la variable independiente, haciendo el cambio:

$$y'' = \frac{dy'}{dt} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = y' \frac{dy'}{dy}$$

lo que reduce en 1 el orden de la ecuación, convirtiéndola en:

$$y' \frac{dy'}{dy} + 2y' + 2y = 0 \implies \frac{dy'}{dy} = 2 \left(1 + \frac{y}{y'} \right)$$

ecuación de función homogénea en y e y' . Haciendo el cambio $y' = zy \implies \frac{dy'}{dy} = z + y \frac{dz}{dy}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} z + y \frac{dz}{dy} &= 2 \left(1 + \frac{1}{z} \right) \\ y \frac{dz}{dy} &= \frac{1 + z - z^2}{z} \\ \int \frac{z dz}{1 + z - z^2} &= \int \frac{dy}{y} \end{aligned}$$

Resolviendo las integrales correspondientes, obtenemos que:

$$\frac{\sqrt{5} - 5}{10} \ln \left(\left| \frac{\sqrt{5} + (2z - 1)}{\sqrt{5} - (2z - 1)} \right| \right) = \ln(|y|) - \ln(|c|)y = c \left(\frac{\sqrt{5} + (2z - 1)}{\sqrt{5} - (2z - 1)} \right)^{(\sqrt{5}-5)/10}$$

Despejando z en función de y podemos obtener y' en función de y y obtener una ecuación de primer orden. La solución general de la ecuación, tras resolver las ecuaciones pertinentes, es:

$$y = \frac{1}{2} + e^{-x}(c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x))$$

Nótese que aparecen dos constantes arbitrarias en la solución.

P2 Con respecto a la ecuación diferencial de Ricatti a coeficientes constantes:

$$y' + ay^2 + by + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}$$

P2.a) Encuentre una condición necesaria y suficiente para que esta ecuación tenga una solución constante $y \equiv y_0$.

Si y_0 es una solución constante, entonces $y'_0 = 0$. Reemplazando en la ecuación de Ricatti obtenemos la expresión:

$$ay_0^2 + by_0 + c = 0$$

que es una ecuación cuadrática en y_0 . De este modo, la condición necesaria y suficiente para que esta ecuación tenga una solución constante es que y_0 sea solución de la ecuación cuadrática anterior, obtenida al eliminar el término y' .

P2.b) Use lo anterior para resolver la ecuación $y' + y^2 + 3y + 2 = 0$.

Inmediatamente vemos que la ecuación cuadrática que se obtiene al eliminar el término y' tiene por soluciones $\{-1, -2\}$. Tomaremos $y_0(x) \equiv 1$ y haremos el cambio de variable $y(x) = y_0(x) + \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - 1$, con lo que obtenemos, al reemplazar en la ecuación, la expresión:

$$\begin{aligned}\frac{z'}{z^2} - 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} - \frac{3}{z} - 3 + 2 &= 0 \\ z' &= 1 - z \\ \int \frac{z'(x) dx}{1 - z(x)} &= \int dx \\ \ln\left(\left|\frac{1}{1 - z}\right|\right) &= x + \ln(|c|) \\ z(x) &= 1 - ce^{-x}\end{aligned}$$

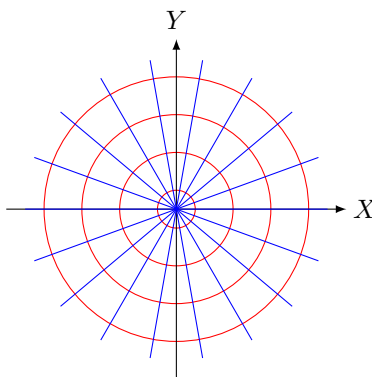
y reemplazando en la expresión $y = \frac{1}{z} - 1$ obtenemos^a que:

$$y = \frac{1}{1 - ce^{-x}} - 1$$

^aTengo que revisar esto.

P3 (Trayectorias ortogonales)

Definición. Dada una familia de curvas $\Gamma(c) : f(x, y, c) = 0$, en que c es un parámetro (de modo que a cada valor de c le corresponde una curva de la familia) una **trayectoria ortogonal** de la familia es una curva Γ^* tal que en todos los puntos de intersección de Γ^* con una de las curvas $\Gamma(c)$ las tangentes de ambas curvas son perpendiculares. Por ejemplo, todas las rectas $y = mx$ son trayectorias ortogonales de la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = c^2$, como puede verse en la figura:



P3.a) Si conoce una ecuación diferencial de la forma $y' = f(x, y)$ tal que la familia de curvas $\Gamma[c]$ sea solución de esta ecuación, explique cómo pueden determinarse todas las trayectorias ortogonales de esta familia de curvas. (**Sugerencia:** ¿Qué condición deben satisfacer dos rectas para ser perpendiculares?)

La condición para que dos rectas no paralelas de pendientes m_1 y m_2 sean ortogonales en su punto de intersección es que $m_1 m_2 = -1$. Además, como sabemos que todas las curvas de la familia dada por $F(x, y, c) = 0$ satisfacen la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, deducimos que la tangente a una curva de esta familia que pase por (x, y) tiene pendiente $f(x, y)$. De este modo, la trayectoria ortogonal de esta familia debe tener pendiente dada por una función $g(x, y)$, que satisfaga la condición $f(x, y)g(x, y) = -1$. Así, la EDO correspondiente a la familia de curvas ortogonales está dada por:

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}$$

P3.b) Encuentre una ecuación diferencial cuya solución sea la familia de elipses $x^2 + 3y^2 = c^2$. Aplique lo anterior para determinar las trayectorias ortogonales de esta familia.

Podemos ver mediante una simple derivación implícita que la ecuación que satisface esta familia es $x + 3yy' = 0$. Despejando y' en función de x e y obtenemos:

$$y' = -\frac{x}{3y}$$

de modo que la ecuación correspondiente a la familia de curvas ortogonales es:

$$y' = \frac{3y}{x}$$

ecuación de variables separables, cuya solución es la familia de curvas $y = cx^3$.

P4 Considere la ecuación diferencial:

$$y' + a(x)y = b(x)$$

en que $a, b \in \mathbb{R}$ son periódicas de período T . Pruebe que toda solución de esta ecuación tal que $y(0) = y(T)$ es periódica. (**Sugerencia:** ¿Qué dice el Teorema de Existencia y Unicidad respecto a $y(x + T)$?)

Supongamos que $y(0) = y(T) = \alpha$. Sabemos que $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$, por hipótesis del problema, lo que indica en particular que $y'(x + T) + a(x + T)y(x + T) = b(x + T)$. Pero $a(x)$ y $b(x)$ son funciones T -periódicas, de modo que la igualdad anterior es equivalente a $y'(x + T) + a(x)y(x + T) = b(x)$.

De este modo, la función $w(x) = y(x + T)$ satisface la ecuación diferencial $w' + a(x)w = b(x)$, y además, $w(0) = y(T) = \alpha$. Así, tanto w como y son soluciones de la misma EDO con la misma condición inicial; como la función es Lipschitz en la segunda variable, podemos aplicar el Teorema de Existencia y Unicidad^a, el cual nos asegura que ambas funciones son iguales, es decir, $w(x) = y(x + T) \equiv y(x)$. Esto implica que la función $y(x)$ es T -periódica.

^aNo, no lo voy a poner en negrita.

P5 Demuestre que si $a > 0$ y $b : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua tal que $b(x) \rightarrow \beta$ cuando $x \rightarrow \infty$, todas las soluciones de $y' + ay = b(x)$ convergen a β/a cuando $x \rightarrow \infty$.

Esteban hizo este ejercicio en su Catedrauxiliar

P6 El objetivo de este ejercicio es demostrar un caso particular del Teorema de Existencia y Unicidad. Consideremos la siguiente ecuación:

$$y'' + ay' + by = 0, \quad a, b \geq 0 \text{ constantes}$$

P6.a) Considere el siguiente problema de valor inicial: $y(t_0) = y'(t_0) = 0$, para un $t_0 \in \mathbb{R}$. Es evidente que la función nula $y \equiv 0$ es una solución del problema. Demuestre que es la única solución posible. (**Sugerencia:** Multiplique la ecuación anterior por y' e integre. Saque sus conclusiones a partir de la expresión obtenida).

Multiplicando la expresión anterior por y' e integrando, obtenemos la siguiente identidad:

$$\int_{t_0}^t y'(u)y''(u) + ay'(u)^2 + by(u)y'(u) du = \int_{t_0}^t 0 du = 0$$

Recordando que $y(t_0) = y'(t_0) = 0$ y usando el teorema del cambio de variables en integración, llegamos a la expresión:

$$\frac{y'(t)^2}{2} + \int_{t_0}^t ay'(u)^2 du + b\frac{y(t)^2}{2} = 0$$

expresión que es suma de términos no negativos para todo $t > t_0$, con lo que concluimos que, para que ésta pueda anularse, todos los términos deben ser nulos. En particular, $y(t) \equiv 0$ para todo $t \geq t_0$.

P6.b) A partir de lo anterior, pruebe que dos funciones soluciones del mismo problema de valor inicial $y(t_0) = a$, $y'(t_0) = b$ para la ecuación anterior son idénticas en todo su dominio de definición.

Supongamos que las dos funciones y_1 e y_2 satisfacen el mismo problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= 0 \\ y(t_0) &= \alpha \\ y'(t_0) &= \beta \end{aligned}$$

De este modo, la función $\bar{y} = y_1 - y_2$ satisface la misma EDO, con la condición inicial $\bar{y}(t_0) = \bar{y}'(t_0) = 0$. Por lo que demostramos en la sección anterior, debe ser $\bar{y} \equiv 0$ o, lo que es lo mismo, $y_1 \equiv y_2$. Así, vemos que la solución del problema es única.

P6.c) ¿Hay alguna forma de argumentar algo similar para los casos en que a o b son negativas? ¿Cómo podría extenderse el argumento para ecuaciones de orden superior a coeficientes constantes?

Daremos un bosquejo de argumento para el caso general. Consideremos la ecuación diferencial general homogénea de orden n a coeficientes constantes:

$$y^{[n]} + a_{n-1}y^{[n-1]} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (3)$$

Si $y \in \mathcal{C}^n$ (es decir, $y(t)$ y sus primeras n derivadas son continuas), entonces se desprende que $y^{[n]} \in \mathcal{C}^0$. Podemos despejar esta función en términos de las derivadas anteriores, como sigue:

$$y^{[n]} = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{[k]} \quad (4)$$

Pero esto expresa a $y^{[n]}$ como suma de términos que son de clase $\mathcal{C}^1$ o mayor, de modo que $y^{[n]}$ mismo es de clase $\mathcal{C}^1$ y por lo tanto $y \in \mathcal{C}^{n+1}$. Iterando, deducimos que $y \in \mathcal{C}^\infty$. Ahora, si consideramos la condición inicial $y(t_0) = y'(t_0) = y''(t_0) = \dots = y^{[n-1]}(t_0)$ y reemplazamos en (4), obtenemos que $y^{[n]}(t_0) = 0$. Derivando (4) iteradamente, llegamos a que:

$$\forall k \geq 0, y^{[k]}(t_0) = 0$$

De este modo, si hacemos el desarrollo en serie de Taylor de y en torno a t_0 vemos que:

$$y(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{[k]}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k \equiv 0$$

con lo que demostraríamos lo mismo que en la parte (a) de este ejercicio. Sin embargo, nada nos asegura que $y(t)$ efectivamente coincida con su serie de Taylor, ya que existen funciones infinitamente derivables en un punto, cuya serie de Taylor converge en un entorno de ese punto, y sin embargo solamente coinciden con el valor de su serie de Taylor en ese punto y en ningún otro de este entorno. Necesitaríamos condiciones más estrictas para poder probar formalmente este resultado; por ejemplo, puede usarse el hecho de que la función y todas sus derivadas son de clase $\mathcal{C}^\infty$ para todo su dominio de definición, de modo que puede usarse un argumento de continuidad y el teorema del resto de Taylor para probar que esta serie es efectivamente igual a $y(t)$, al menos en un entorno de t_0 .