

Control 1 MA 2601, 2011/1

Prof. Salomé Martínez

Aux. Edgardo Mathies y Sebastián Barbieri

Duración 3 hrs.

P1 a) Considere el siguiente modelo para el crecimiento de una población, en donde se incorpora pesca, la cual es proporcional al tamaño de la población:

$$\frac{dN}{dt} = N(1 - N) - qN$$

La constante q es una constante positiva que representa la intensidad de la pesca.

1) Bosqueje el diagrama de pendientes para esta ecuación para $q = 1, q < 1, q > 1$

2) Para $q = 1, q < 1, q > 1$. Determine la solución del problema de valor inicial con $N(0) \geq 0$, explicitando en cada caso el intervalo donde la solución está definida.

3) Para $0 < q \leq 1$ demuestre que cualquier solución del problema de valor inicial converge a $1 - q$.

4) Si una empresa desea maximizar, para un tiempo muy grande, qN . ¿Qué intensidad de pesca q le recomendaría usted adoptar?

b) Suponga que una especie tiene un tipo de crecimiento dado por:

$$\frac{dN}{dt} = N(2N - 1)(1 - N)$$

1) Bosqueje el diagrama de pendientes para esta ecuación.

2) Conjeture a partir de su diagrama cuál es el comportamiento, cuando $t \rightarrow \infty$, de las soluciones con condición inicial $0 < N(0) < 1/2, 1/2 < N(0) < 1$ y $N(0) > 1$

P2) Considere la ecuación:

$$y' = f(y)$$

con $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 con derivada acotada. En este caso el teorema de existencia y unicidad provee la existencia de soluciones del problema de valor inicial y la unicidad en $\mathbb{R}$ (puede usar esto).

a) Demuestre que si $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una solución, entonces si para algún t_0 se tiene que $y'(t_0) = 0$ la función y es constante.

b) Suponga que $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una solución acotada de la ecuación, es decir existe $K > 0$ tal que $|y(t)| \leq K$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Demuestre que $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t), \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t)$ existen. Ind: Use la parte anterior.

c) Demuestre que todas las soluciones de la ecuación diferencial $y' = 1 + \cos^2(y)$ son no acotadas.

Ind: Pruebe que si $y(t) \rightarrow a$ cuando $t \rightarrow \infty$ (o $t \rightarrow -\infty$), entonces $f(a) = 0$, y use la parte anterior.

P3) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales (cuando sea posible, despeje la solución).

a) $(a^2 + x^2)y' + xy = a^2$

b) $(1 + e^x)yy' = e^y$

c) $y' = \frac{x+y}{x+y+1}$, use el cambio $z = x+y$

d) $y' + y = f(x)$, con $f(x) = x$ para $x \geq 0$ y $f(x) = -x$ para $x < 0$