 Pablo Estefó C. [pestefo@ing.uchile.cl]

Capítulo 1 y 2

EDO de Variables Separables

Sea $y' = \frac{g(t)}{h(y)}$, con g, h contnuas y $h(y) \neq 0$

$$H(y) = G(t) + C \Leftarrow \left\{ \begin{array}{lcl} H(s) & = & \int h(s)ds \\ G(t) & = & \int g(t)dt \end{array} \right.$$

Con c.i. $y' = \frac{g(t)}{h(y)}$ y $y(t_0) = y_0$ $\int_{y_0}^{y(t)} h(s)ds = \int_{t_0}^{t} g(t)dt$

$$H(y)\Big|_{y_0}^{y(t)} = G(t)\Big|_{t_0}^{t} \longrightarrow H(y(t)) = G(t) + \underbrace{H(y_0) + G(t_0)}_{C}$$

EDO Lineal de Primer Orden

$$y' + P(t)y = f(t)$$

1° Multiplicamos por $e^{\int P(t)dt}$

2° $\frac{d(y(t)e^{\int P(t)dt})}{dt} = f(t)e^{\int P(t)dt}$

3° Integramos y dividimos por $e^{\int P(t)dt}$.

$$y(t) = \underbrace{Ce^{-\int P(t)dt}}_{\text{homogénea}} + \underbrace{e^{-\int P(t)dt} \cdot \int f(t)e^{\int P(t)dt}dt}_{\text{particular}}$$

EDO No Lineal de Primer Orden

$$y' = -\frac{M(t,y)}{N(t,y)}, \; M, N \text{ contínuas}$$

Cumplen $M(st, sy) = s^\alpha M(t,y)$ y $N(st, sy) = s^\alpha N(t,y)$

1° CV: $y = ut \rightarrow u' = -\dfrac{u + \frac{M(1,u)}{N(1,u)}}{t}$

2° Resolver ec. de variables separables con
$h(u) = \left(u + \frac{M(1,u)}{N(1,u)}\right)^{-1} \qquad g(t) = -\frac{1}{t}$

3° Obtener $u(t)$ y reemplazar en el cv.

Ec. de Bernoulli

$$y' + P(t)y = f(t)y^n \rightarrow y^{-n}y' + P(t)y^{1-n} = f(t)$$

Usar cv. $u(t) = y^{1-n} \rightarrow u' = (1-n)y^{-n}y'$ queda una ec. lineal de primer orden

$$u' + \underbrace{(1-n)P(t)}_{\tilde{P}(t)} u = \underbrace{(1-n)f(t)}_{\tilde{f}(t))}$$

Ec. de Ricatti

$$y' = P(t) + Q(t)y + R(t)y^2$$

1° y_1 solución de la edo

2° Definimos $z = y(t) - y_1(t) \rightarrow y' = z' + y_1'$

3° Reemplazando y despejando z' tenemos
$z' - (Q(t) + 2y_1(t)R(t))z = R(t)z^2$ (Bernoulli $n = 2$)

Capítulo 3

$\boxed{\textbf{Teo - Def}}$ $\{f_1(t), f_2, \ldots, f_n(t)\}$ es l.i. $\Longleftrightarrow$ Su **Wronskiano** asociado

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & \ldots & f_n \\ f_1' & \ldots & f_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & \ldots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

EDOs Lineal de segundo orden homogénea

$$y'' + P(t)y' + Q(t)y = 0 \rightarrow y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

- Caso 1: $y_1(t)$ conocido, $y_2(t) = y_1(t) \cdot \int \frac{e^{-\int P(t)dt}dt}{y_1^2(t)}$

  $\boxed{\textbf{Obs}}$ En este médoto se trabaja sobre la ec. *normalizada.*

- Caso 2 (*Coef. Ctes*): $ay'' + by' + cy = 0$.
  Tanteo sols. $\boxed{e^{mt}}$.
  Con lo que la ec $\Leftrightarrow p(m) = am^2 + bm + c = 0 \rightarrow m_1, m_2$
  Soluciones posibles:

  a) $m_1 \neq m_2 \in \mathbb{R} \rightarrow y(t) = c_1e^{m_1t} + c_2e^{m_2t}$

  b) $m_1 = m_2 \in R \rightarrow y(t) = e^{mt}(c_1 + c_2t)$

  c) $m = \alpha \pm i\beta \rightarrow y(t) = e^{\alpha t}(c_1\cos(\beta t) + c_2\sin(\beta t))$

- Caso 3 (*Euler-Cauchy*): $at^2y'' + bty' + cy = 0$, tanteo $\boxed{y = t^\alpha}$. Con lo q la ec $\Leftrightarrow a\alpha^2 + (b-a)\alpha + c = 0$

  Soluciones posibles:

  a) $\alpha_1 \neq \alpha_2 \in \mathbb{R} \rightarrow y(t) = c_1t_1^\alpha + c_2t_2^\alpha$

b) $\alpha_1 = \alpha_2 \in R \rightarrow y(t) = c_1 t^\alpha + c_2(\ln(t))t^\alpha$

c) $\alpha = a \pm ib \rightarrow y(t) = t^c[c_1\cos(b\ln(t)) + c_2\sin(b\ln(t))]$

Obs A veces sirve hacer el cv $u = ln(t)$ sobre la var. independiente.

Edos lineales de orden n no homogéneas

- *Variación de Parámetros*

$$y'' + P(t)y' + Q(t)y = f(t)$$

1° Hallar sols. homogéneas y_1, y_2 (métodos anteriores)

2° $y_p(t) = u_1 y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

3° Usando Kramer

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{W(y_1,y_2)} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

4° Finalmente $u_1 = -\int \frac{y_2 f(t)dt}{W(y_1,y_2)(t)}$ y $u_2 = \int \frac{y_1 f(t)dt}{W(y_1,y_2)(t)}$

Def *Operador Diferencial*
$D \equiv \frac{d}{dt}$, $D^2 = \frac{d^2}{dt^2}, \ldots, D^n = \frac{d^n}{dt^n}$. D es lineal

- *Método de coeficientes indeterminados*

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(t)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0 I)y(t) = g(t)$$

1° Obtener soluciones homogéneas $y_h(t)$

2° Calcular anulador de $g(t) \rightarrow p(D)g(t) = 0$

1) $(m-\alpha)^n \rightarrow \{e^{\alpha t}, te^{\alpha t}, \ldots, t^{n-1}e^{\alpha t}\}$

2) $(m^2 - 2\alpha m + \alpha^2 + b^2)^n \searrow$
$\{e^{\alpha t}\cos(\beta t), te^{\alpha t}\cos(\beta t), \ldots, t^{\alpha-1}e^{\alpha t}\cos(\beta t)$
$e^{\alpha t}\sin(\beta t), te^{\alpha t}\sin(\beta t), \ldots, t^{\alpha-1}e^{\alpha t}\sin(\beta t)\}$

3° Aplicar anulador y calcular la nueva homogénea $y_h^* = p(D)y = 0$

4° La forma de la sol. particular es la nueva homogénea menos la homogénea obtenida en 1°
$y_p = y_h^* - y_h$

5° Reemplazamos $y_p(t)$ con sus coef. indet. en la EDO y calculamos los coefs. igualando a $g(t)$.

Capítulo 4

Transformada de Laplace

Def $f(t)$ es de *orden exponencial* si $\exists C > 0, M > 0, T > 0$ tq.

$$|f(t)| \leq Me^{Ct}, \quad \forall t \geq T$$

Def *Transformada de Laplace*

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) \equiv \int_0^\infty e^{-st}f(t)\mathrm{d}t$$

Teo $f(t)$ contínua por trozos y ord. exp. $\Rightarrow$ admite TdL $\forall s > C$

Teo La TdL es contínua en intervalo (C, ∞)

Prop La TdL es *lineal.*

Def *Transformada Inversa* $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$. Tb es lineal.

Prop Sean $f(t), g(t)$ dos funciones con una cantidad finita de valores distintos poseen igual transformada (suponiendo q cumplen las condiciones).

Prop Si $F(s)$ es la transformada de algún $f(t)$
$\Rightarrow \lim_{s\to\infty} F(s) = 0$

Tabla de Transformadas

$\mathcal{L}(1)$	$=$	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
$\mathcal{L}(t^n)$	$=$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0, \quad n \geq 1$
$\mathcal{L}(e^{at})$	$=$	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$\mathcal{L}(\sin(kt))$	$=$	$\frac{k}{s^2+k^2}$	
$\mathcal{L}(\cos(kt))$	$=$	$\frac{s}{s^2+k^2}$	
$\mathcal{L}(sinh(kt))$	$=$	$\frac{k}{s^2-k^2}$	
$\mathcal{L}(\cosh(kt))$	$=$	$\frac{s}{s^2-k^2}$	

Propiedades Operacionales

Teo *Traslación v1.0*

$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a)$ (sup. q f admite TdL)

Def *Función Heaviside*

$$U(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

Teo *Traslación v2.0*

$$\mathcal{L}(f(t-a)U(t-a)) = e^{-as}F(s)$$

Teo *Derivadas de una Tansformada*

$$\frac{d^n F(s)}{ds^n} = (-1)^n \mathcal{L}(t^n f(t))$$

Teo *Transformada de derivadas* $(s > C)$

$$\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

O de forma más compacta:

$$\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n F(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} y^{(i-1)}(0)$$

Aplicaciones a EDO

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(t)$$

- c.i. $y^{(i)}(0) = c_{i+1}, \quad \forall i = 0, \ldots, n-1$
- g admite TdL
- $a_0, \ldots, a_n$ y $c_0, \ldots, c_n$ ctes. reales.

Aplicando TdL nos queda:

- $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$
- $G(s) = \mathcal{L}(g(t))$
- $Q(s) = -a_n[\sum\limits_{i=1}^{n} s^{n-i} y^{(i-1)}(0)] - a_{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n-1} s^{n-i}(i-1) - \ldots - a_0 y_0$
  $Q(s)$ es un polinomio de grado $(n-1)$ en s, función de las conficiones iniciales.
- $P(s) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i s^i = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$ (pol. característico)

La ec. queda: $P(s)Y(s) + Q(s) = G(s)$, con lo que, finalmente

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{P(s)}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{Q(s)}{P(s)}\right)$$

Producto de Convolución

Def f, g admiten TdL.

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) \mathrm{d}\tau$$

Obs El producto de convolución es *conmutativo*

Teo La Transformada del producto de convolución es el producto de las Transformadas

$$\mathcal{L}((f * g)(t)) = F(s)G(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s)) = (f * g)(t)$$

Teo *Transformada de una Integral*

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right) = \frac{1}{s}F(s)$$

Y la Integral de una Transformada:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}F(s)\right) = \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Teo *Transformada de una función periódica*

$$F(s) = \frac{\int_0^a e^{-st} f(t)\mathrm{d}t}{1 - e^{-sa}}, \text{ donde } f(t) \text{ posee periodo } a$$