Control 1 MA 2601, 2010/1
Prof. Salomé Martínez
Aux. Kasandra Pavez y Emilio Vilches
Duración 3 hrs.

1. *a*) Considere el siguiente modelo que describe la evolución de una población, en que la tasa de nacimientos decae exponencialmente con el tiempo
$$\frac{dN}{dt} = r_0 e^{-\alpha t} N.$$
En este modelo N representa la densidad de la especie, y r_0, α son constantes positivas.
    1) (1pt) Determine todas las soluciones de esta ecuación. Pruebe que si $N(0) > 0$ entonces $N(t) > 0$ para todo t.
    2) (1pt) Describa el comportamiento cuando $t \to \infty$ de las soluciones con condición inicial $N(0) \geq 0$.
    3) (2pt) Demuestre que si $N(0) > 0$, entonces $N(t)$ satisface
    $$\frac{dN}{dt} = \alpha N \log\left(\frac{K}{N}\right),$$
    con K una constante. Determine la constante K. Bosqueje el diagrama de pendientes asociado a esta ecuación para $N > 0$.

   b) (2pt) Resuelva la ecuación homogénea
$$y' = \frac{x+3y}{3x+y}.$$

2. *a*) (3pt) Sea $a \neq 0$ una constante, y b_1, b_2 dos funciones continuas en $[0, \infty)$ que satisfacen $|b_1(x) - b_2(x)| \leq k$ para todo $x \in [0, \infty)$, con $k > 0$ una constante. Sea y_1 una solución de $y' + ay = b_1(x)$ y y_2 una solución de $y' + ay = b_2(x)$.
Demuestre que si para algún $x_0 \in \mathbb{R}$ se tiene $y_1(x_0) = y_2(x_0)$, entonces
$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq \frac{k}{a}|1 - e^{-a(x-x_0)}| \text{ para todo } x \in [0, \infty).$$

   b) (3pt) Demuestre que si $a > 0$ y $b : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es continua tal que $b(x) \to \beta$ cuando $x \to \infty$ entonces todas las soluciones de $y' + ay = b(x)$ convergen a $\frac{\beta}{a}$ cuando $x \to \infty$.

3. En este problema supondremos que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y que existe $C > 0$ tal que para todo $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $|f(y_1, x) - f(y_2, x)| \leq C|y_1 - y_2|$.
   a) (2pt) Suponga que $f(x, 0) = 0$. Demuestre que la única solución del problema $y' = f(x, y)$ con $y(0) = 0$ es $y \equiv 0$.
   b) (2pt) Suponga que existe $T > 0$ tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x+T, y) = f(x, y)$. Demuestre que si $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es solución de $y' = f(x, y)$ con $\phi(0) = \phi(T)$ entonces ϕ es periódica de período T (es decir $\phi(x + T) = \phi(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
   c) (2pt) Encuentre las soluciones de periodo 2π de la ecuación $y' + 2y = \cos(x)$.