EDO: Catedrauxiliar

Auxiliares: Esteban Escorza, Álvaro Bustos

$\boxed{\text{P1}}$ (P3 Control 1 2009)
Sea $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función periódica de período $T > 0$. Definimos $\bar{a}$, el promedio de a como $\frac{1}{T}\int_0^T a(s)ds$.
P1.a) Demuestre que una solución no nula de la ecuación lineal de primer orden homogénea:

$$y' = a(t)y,\ t \in \mathbb{R}$$

tiene período T sí y solo si $\bar{a} = 0$. **Indicación**: pruebe previamente que $\int_{t_0}^{t_0+T} a(s)ds = \int_0^T a(s)ds = \bar{a}T$
P1.b) Para $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-periódica , considere la ecuación diferencial:

$$y' = a(t)y + b(t),\ t \in \mathbb{R}$$

Pruebe que si $\bar{a} \neq 0$, entonces esta ecuación tiene a lo más una solución de período T.
P1.c) Demuestre que si $\bar{a} = 0$ y $\int_0^T e^{-\int_0^\tau a(s)ds} b(\tau)d\tau = 0$, entonces todas las soluciones tienen período T.
P1.d) Demuestre que si $\bar{a} = 0$ y $\int_0^T e^{-\int_0^\tau a(s)ds} b(\tau)d\tau \neq 0$, entonces no tiene soluciones de período T.

$\boxed{\text{P2}}$ (P2 Control 1 2010)
P2.a) Sea $a \neq 0$ y b_1, b_2 dos funciones continuas en $[0, \infty)$ que satisfacen $|b_1(x) - b_2(x)| \leq K$, $\forall x \in [0, \infty)$, con $K > 0$ constante. Sea y_1 una solución de $y' + ay = b_1(x)$ e y_2 una solución de $y' + ay = b_2(x)$. Demuestre que si existe $x_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $y_1(x_0) = y_2 = (x_0)$ entonces:

$$|y_2 - y_1| \leq \frac{K}{a}\left|1 - e^{-a(x-x_0)}\right|,\ \forall x \in [0, \infty)$$

P2.b) Demuestre que si $a > 0$ y $b : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, continua tal que $\lim\limits_{x\to\infty} b(x) = \beta$, entonces todas las soluciones de $y' + ay = b(x)$ convergen a $\frac{\beta}{a}$ cuando $x \to \infty$.

$\boxed{\text{P3}}$ (P2 Control 1 2011) Considere la ecuación diferencial:

$$y' = f(y)$$

con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función de clase $\mathcal{C}^1$, con derivada acotada.
P3.a) Demuestre que si $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una solución, entonces si para algún t_0 se tiene que $y'(t_0) = 0$, la función y es constante.
P3.b) Suponga que $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una solución acotada en $\mathbb{R}$. Demuestre que $\lim\limits_{t\to\infty} y(t), \lim\limits_{t\to-\infty} y(t)$ existen.
Indicación: use la parte anterior.
P3.c) Demuestre que las soluciones de la ecuación $y' = 1 + \cos^2(y)$ son no acotadas. **Indicación**: Pruebe que si $y(t) \to a$ cuando $t \to \infty$ (o $t \to -\infty$), entonces $f(a) = 0$ y utilice los resultados anteriores.