Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesora Salomé Martínez
Semestre de Otoño, 2012

EDO: Auxiliar 2

Auxiliares: Álvaro Bustos, Esteban Escorza

P1 Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

P1.a) $y = (3y^2 + 2x - 2)y'$

P1.b) $3(1 + x^2)y' = 2xy(y^3 - 1)$ (Ecuación de Bernoulli)

P1.c) $y' = 1 - x - y + xy^2$ (Ecuación de Ricatti)

P1.d) $xy' - y = e^{y'}$ (Ecuación de Clairaut)

P1.e) $y'' + 2y' + 2y = 1$

P2 Con respecto a la ecuación diferencial de Ricatti a coeficientes constantes:

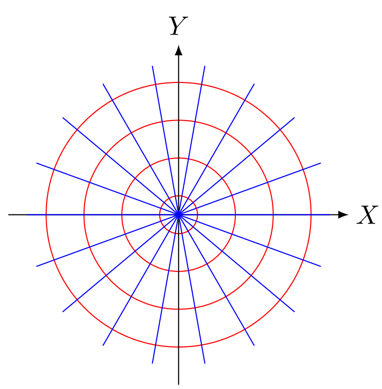
$$y' + ay^2 + by + c = 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}$$

P2.a) Encuentre una condición necesaria y suficiente para que esta ecuación tenga una solución constante $y \equiv y_0$.

P2.b) Use lo anterior para resolver la ecuación $y' + y^2 + 3y + 2 = 0$.

P3 (Trayectorias ortogonales)

Definición. Dada una familia de curvas $\Gamma(c) : f(x, y, c) = 0$, en que c es un parámetro (de modo que a cada valor de c le corresponde una curva de la familia) una **trayectoria ortogonal** de la familia es una curva Γ^* tal que en todos los puntos de intersección de Γ^* con una de las curvas $\Gamma(c)$ las tangentes de ambas curvas son perpendiculares. Por ejemplo, todas las rectas $y = mx$ son trayectorias ortogonales de la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = c^2$, como puede verse en la figura:



P3.a) Si conoce una ecuación diferencial de la forma $y' = f(x, y)$ tal que la familia de curvas $\Gamma[c]$ sea solución de esta ecuación, explique cómo pueden determinarse todas las trayectorias ortogonales de esta familia de curvas. (**Sugerencia:** ¿Qué condición deben satisfacer dos rectas para ser perpendiculares?)

P3.b) Encuentre una ecuación diferencial cuya solución sea la familia de elipses $x^2 + 3y^2 = c^2$. Aplique lo anterior para determinar las trayectorias ortogonales de esta familia.

$\boxed{\text{P4}}$ Considere la ecuación diferencial:

$$y' + a(x)y = b(x)$$

en que $a, b \in \mathbb{R}$ son periódicas de período T. Pruebe que toda solución de esta ecuación tal que $y(0) = y(T)$ es periódica. (**Sugerencia:** ¿Qué dice el Teorema de Existencia y Unicidad respecto a $y(x + T)$?)

$\boxed{\text{P5}}$ Demuestre que si $a > 0$ y $b : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es continua tal que $b(x) \to \beta$ cuando $x \to \infty$, todas las soluciones de $y' + ay = b(x)$ convergen a β/a cuando $x \to \infty$.

$\boxed{\text{P6}}$ El objetivo de este ejercicio es demostrar un caso particular del Teorema de Existencia y Unicidad. Consideremos la siguiente ecuación:

$$y'' + ay' + by = 0,\ a, b \geq 0 \,\text{constantes}$$

P6.a) Considere el siguiente problema de valor inicial: $y(t_0) = y'(t_0) = 0$, para un $t_0 \in \mathbb{R}$. Es evidente que la función nula $y \equiv 0$ es una solución del problema. Demuestre que es la única solución posible. (**Sugerencia:** Multiplique la ecuación anterior por y' e integre. Saque sus conclusiones a partir de la expresión obtenida).

P6.b) A partir de lo anterior, pruebe que dos funciones soluciones del mismo problema de valor inicial $y(t_0) = a$, $y'(t_0) = b$ para la ecuación anterior son idénticas en todo su dominio de definición.

P6.c) ¿Hay alguna forma de argumentar algo similar para los casos en que a o b son negativas? ¿Cómo podría extenderse el argumento para ecuaciones de orden superior a coeficientes constantes?