

Control 2 MA26B Matemáticas Aplicadas

Semestre 2004-2

7 de octubre de 2004

Profesores: I. Guerra, P. Guiraud, J. Dávila

Problema 1. a) Estudie en qué puntos del plano complejo son derivables las siguientes funciones:

$$i) \quad f(z) = e^x(\cos y - i \operatorname{sen} y), \quad ii) \quad f(z) = (z - i)\bar{z}, \quad z = x + iy$$

y calcule sus derivadas donde éstas existan.

b) Sea $a \in \mathbb{R}$. Encuentre el radio de convergencia R de la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ donde $c_k = a + 1$ si k es par y $c_k = 1$ si k es impar. Compruebe que

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \frac{a+1+z}{1-z^2} \quad \forall |z| < R.$$

Indicación. Recuerde la serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = \frac{1}{1-\rho}$ si $|\rho| < 1$, $\rho \in \mathbb{C}$.

Problema 2. Calcule

$$a) \quad \oint_{|z|=2} \frac{e^{\pi z}}{z^3 + z} dz, \quad b) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + a^2)} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad c) \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5 + 3 \cos \theta)^2}.$$

Problema 3. a) Sea f una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con un número finito de polos tal que

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p} \quad \forall |z| \geq M$$

donde $p > 1$ y $M, K > 0$ son constantes. Denotemos por $z_1, \dots, z_m$ los polos de f y supongamos que $z_j \notin \mathbb{Z} \quad \forall j = 1, \dots, m$. El objetivo es probar que bajo estas hipótesis se cumple

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = - \sum_{j=1}^m \operatorname{Res}(\pi f(z) \cot g(\pi z), z_j). \quad (1)$$

i) Muestre que todo entero $k \in \mathbb{Z}$ es un polo simple de $\pi f(z) \cot g(\pi z)$ y calcule $\operatorname{Res}(\pi f(z) \cot g(\pi z), k)$ para $k \in \mathbb{Z}$.

ii) Para $N \in \mathbb{N}$ sea γ_N es el camino correspondiente al borde del cuadrado de vértices:

$$(N + \frac{1}{2})(-1 - i), (N + \frac{1}{2})(1 - i), (N + \frac{1}{2})(1 + i), (N + \frac{1}{2})(-1 + i).$$

Demuestre que

$$\left| \oint_{\gamma_N} g(z) dz \right| \leq \frac{\pi A K (8N + 4)}{N^p}$$

donde A es una constante independiente de N tal que

$$|\cot g(\pi z)| \leq A \quad \forall z \in \gamma_N.$$

(Puede usar esta última afirmación sin necesidad de probarla.)

iii) Deduzca la fórmula (1).

b) Pruebe que para $a > 0$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a).$$

TIEMPO: 3 HORAS.

PAUTA: Control 2 MA26B. Año 2004

P1) a) Claramente ambas funciones son Frechet-derivables en todo $\mathbb{R}^2$, de modo que estas serán holomorfas en $z_0 = x_0 + iy_0$ ssi f satisface Cauchy-Riemann en z_0

$$i) \quad f(x+iy) = \underbrace{e^x \cos y}_{u(x,y)} + i \underbrace{(-e^x \sin y)}_{v(x,y)}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y$$

$$\bullet \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -e^x \sin y$$

$$\bullet \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -e^x \sin y$$

$$\bullet \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -e^x \cos y$$

$\Rightarrow$ f satisface Cauchy-Riemann en $z_0 = x_0 + iy_0$ ssi

$$e^{x_0} \cos y_0 = -e^{x_0} \cos y_0 \quad \wedge \quad e^{x_0} \sin y_0 = -e^{x_0} \sin y_0 \quad \text{ssi}$$

$$\cos y_0 = 0 \quad \wedge \quad \sin y_0 = 0 \quad \text{lo cual no puede ser}$$

$\Rightarrow$ f no es Holomorfa en NINGÚN PUNTO.

$$ii) \quad f(x+iy) = (x+iy-i)(x-iy) = \underbrace{(x^2+y^2-y)}_{u(x,y)} + i \underbrace{(-x)}_{v(x,y)}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x$$

$$\bullet \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = +2y - 1$$

$$\bullet \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -1$$

$$\bullet \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0$$

Luego f satisface C.R. ssi

$$2x=0 \wedge -2y+1=-1 \quad \text{ssi} \quad x=0 \wedge y=1 \quad \text{ssi} \quad z_0=j.$$

$$\text{En este caso} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x - j).$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial z}(j) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = -j.$$

$$b) \quad \text{En este caso:} \quad c_k = \begin{cases} a+1 & \text{si } k \text{ es par} \\ 1 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Se tiene que $\limsup_{k \rightarrow \infty} |c_k|^{1/k} = 1$. Para esto notemos

$$\text{que} \quad |c_k|^{1/k} \leq M^{1/k} \quad \text{donde} \quad M = \max(|a+1|, 1)$$

$$\Rightarrow \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} |c_k|^{1/k} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} M^{1/k} = 1.$$

Por otro lado como para la subsecuencia $k_n = 2n+1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |c_{k_n}|^{1/k_n} = 1$$

se concluye que $\limsup_{k \rightarrow \infty} |c_k|^{1/k} = 1$.

$$\text{Además} \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k+1} + (a+1) \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k}.$$

$$= z \sum_{k=0}^{\infty} (z^2)^k + (a+1) \sum_{k=0}^{\infty} (z^2)^k$$

$$= (z + a+1) \sum_{k=0}^{\infty} (z^2)^k$$

$$= \frac{z + a+1}{1 - z^2} \quad \text{si} \quad |z^2| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1 = R.$$

P2]

a) La función $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z^3 + z}$ tiene polos en $z = 0, z = i, z = -i$

$z = -i$ Luego como la curva $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$ encierra a todos los polos de f :

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{\pi z}}{z^3 + z} = 2\pi i \left[\frac{e^{\pi i}}{i(i+i)} + \frac{e^{-\pi i}}{i(-i-i)} + \frac{e^{\pi \cdot 0}}{1} \right]$$

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{2i \cdot i} (e^{\pi i} - e^{-\pi i}) + 1 \right]$$

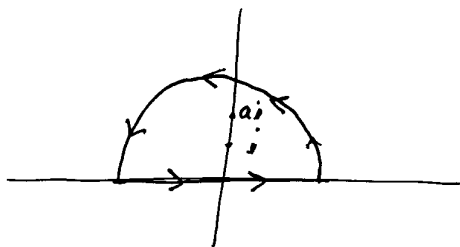
$$= 2\pi \left[\frac{e^{\pi i} - e^{-\pi i}}{2i} + i \right]$$

$$= ((\operatorname{Im} \pi) + i) 2i = 2\pi i.$$

$$\left[f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z(z+i)(z-i)} \Rightarrow \text{polos: } 0, i, -i \right. \quad \left. \begin{array}{c} i \\ \cdot 0 \\ \cdot -i \end{array} \right] \gamma = |z| = 2$$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+a^2)}$

En este caso el camino a considerar es:



Hay dos casos: $a^2 = 1$ v $a^2 \neq 1$.

• Caso $a^2 = 1$: En cualquiera de los dos casos se integra

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+a^2)}. \quad \text{En este caso } f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$$

i.e. $f(z) = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}$ Luego el único polo que

encierra la curva es $z=i$, de modo que

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, i) &= \left. \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{(z+i)^2} \right) \right|_{z=i} \\ &= \left. -\frac{2}{(z+i)^3} \right|_{z=i} = -\frac{2}{(2i)^3} = -\frac{1}{4i^3} = -\frac{1}{-4i} \\ &= -\frac{i}{4} \end{aligned}$$

Además: $\left| \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\sigma}}{(R^2e^{2i\sigma}+1)^2} d\sigma \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{R}{(R^2-1)^2} d\sigma = \frac{2\pi R}{(R^2-1)^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = 2\pi i \left(-\frac{i}{4} \right) = \frac{\pi}{2}$$

• Caso $a^2 \neq 1$

$$\text{En este caso } f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+a^2)} = \frac{1}{(z+i)(z-i)(z+ai)(z-ai)}$$

Luego la curva encierra dos polos: $z=i$; $z=ai$ ($a>0$) $\neq z=-ai$ ($a<0$)
ambos polos de orden 1.

$$\cdot \text{Res}(f, i) = \frac{(z-i)}{(z-i)(z+i)(z^2+a^2)} \Big|_{z=i} = \frac{1}{2i(a^2-1)}$$

$$\cdot \text{Si } a>0 \quad \text{Res}(f, ai) = \frac{1}{(1-a^2)(2ai)} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{(1-a^2)|a|} \right)$$

$$\cdot \text{Si } a<0 \quad \text{Res}(f, -ai) = \frac{1}{(1-a^2)(-2ai)} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{(1-a^2)(-a)} \right) = -\frac{1}{2i} \left(\frac{1}{(1-a^2)|a|} \right)$$

$$\text{Luego } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+a^2)} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } |a|=1 \\ \pi \left(\frac{1}{a^2-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{|a|} \right) \right) & \text{si } |a| \neq 1 \end{cases}$$

c) Consideraremos $f(z) = \frac{1}{iz} \left(\frac{1}{\left[5 + \frac{3}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right]^2} \right)$ de modo que

$$\begin{aligned} f(e^{i\theta}) &= \frac{1}{ie^{i\theta}} \left(\frac{1}{\left(5 + 3 \left(\frac{e^{i\theta} + \bar{e}^{i\theta}}{2} \right) \right)^2} \right) \\ &= \frac{1}{ie^{i\theta}} \left(\frac{1}{(5+3\cos\theta)^2} \right) \quad \text{Y así:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) i e^{i\theta} d\theta &= \int_{|z|=1} f(z) dz \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{(5+3\cos\theta)^2} d\theta \end{aligned}$$

En este caso:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{zj} \cdot \left(5 + \frac{3}{2} \left(z + \frac{1}{2} \right) \right)^{-2} \\ &= \frac{1}{zj} \left(\frac{1}{2} (10z + 3z^2 + 3) \right)^{-2} \\ &= \frac{4z}{j(3z^2 + 10z + 3)} = \frac{4z}{j[(3z+1)(z+3)]^2} \\ &= \frac{4z}{j[(3z+1)^2(z+3)^2]} \end{aligned}$$

Luego el único polo (de orden 2) encerrado por $\gamma = \{z=1\}$ es

$$\begin{aligned} z = -\frac{1}{3} \Rightarrow \operatorname{Res}\left(f, -\frac{1}{3}\right) &= \frac{d}{dz} \left(\frac{4z}{j(3z+1)^2(z+3)^2} \right) \Big|_{z=-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{4}{j} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(3z+1)^2(3+z)^2} \right) \Big|_{z=-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{4}{9j} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(3+z)^2} \right) \Big|_{z=-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{4}{9j} \left(\frac{(3+z)^2 - 2(3+z)z}{(3+z)^4} \right) \Big|_{z=-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{4}{9j} \left(\frac{3+z-2z}{(3+z)^3} \right) \Big|_{z=-\frac{1}{3}} = \frac{4}{9j} \left(\frac{3+\frac{1}{3}}{\left(3-\frac{1}{3}\right)^3} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{9i} \left(\frac{10}{3} \cdot \frac{3^3}{8^3} \right) = \frac{4}{9i} \cdot \frac{10 \cdot 27}{512} = \frac{5}{8i} = \frac{5}{64i}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{1}{(5+3\cos\theta)^2} d\theta = 2\pi \left(\frac{5}{64} \right) = \pi \cdot \frac{5}{32}$$

P3]

i) Como k no es un polo de f entonces, el orden del polo $z=k$ dependerá exclusivamente de $\cotg(\pi z)$.

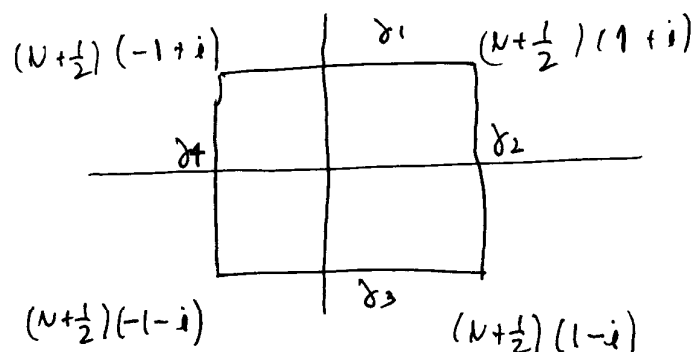
Sabemos que: $\cotg(\pi z) = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ de modo que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow k} (z-k) \cotg(\pi z) &= \lim_{z \rightarrow k} \cos(\pi z) \cdot \lim_{z \rightarrow k} \frac{(z-k)}{\sin(\pi z)} \quad \left(\begin{array}{l} \text{separamos} \\ \text{que ambos} \\ \text{límites} \end{array} \right) \\ &= (-1)^k \cdot \lim_{z \rightarrow k} \frac{1}{\pi \cos(\pi z)} = \frac{(-1)^k}{\pi (-1)^k} = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow k} (\pi f(z) \cotg(\pi z) \cdot (z-k)) = f(k)$$

$$\Rightarrow \text{Res}(\pi f \cotg(\pi \cdot), k) = f(k)$$

ii) Tomemos γ_N como en la figura



Consideremos $\int_{\gamma_i} g(z) dz$, la integral compleja sobre uno de los cuatro caminos de γ_N . de modo que

$$\left| \int_{\gamma_i} g(z) dz \right| \leq L(\gamma_i) \cdot \max_{z \in \gamma_i} |g(z)|$$

$$\leq 2(N + \frac{1}{2}) \cdot \max_{z \in \gamma_i} |\pi f(z) \cot \pi z|$$

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p}$$

$$\leq \frac{K}{|\operatorname{Re}(z)|^p}$$

o bien

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|\operatorname{Im}(z)|^p}$$

$$\leq 2(N + \frac{1}{2}) \pi \frac{K}{(N + \frac{1}{2})^p} \cdot A$$

$$\leq \frac{2(N + \frac{1}{2}) \pi K A}{N^p}$$

$$= \frac{(2N+1) \pi K A}{N^p}$$

Esta desigualdad se tiene $\forall N > M$.

$$\Rightarrow \left| \int_{\gamma_N} g(z) dz \right| \leq \left| \int_{\gamma_1} g(z) dz \right| + \dots + \left| \int_{\gamma_4} g(z) dz \right|$$

$$\leq \frac{4(2N+1) \pi K A}{N^p}$$

$$= \frac{\pi A K (2N+1)}{N^p}$$

iii) Sabemos $\left| \int_{\gamma_N} g(z) dz \right| = \left| \sum_{\substack{P \text{ polo de} \\ \pi f(z) \cot \pi z \\ P \text{ en el interior de } \gamma_N}} \operatorname{Res}(\pi f(z) \cot \pi z, P) \right|$

Por otro lado

$$\sum \operatorname{Res}(\pi f(z) \cot \pi z, P) = \sum_{k=-N}^{k=N} f(k) + \sum_{P \in P} \operatorname{Res}(g(z), P)$$

en donde $P = \{z_i \mid z_i \text{ es polo de } f, \text{ y } z_i \text{ está en el interior de } \gamma_N\}$

$$\Rightarrow \text{Como: } \left| \int_{\gamma_N} g(z) dz \right| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

$$P \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \{z_1, \dots, z_m\}$$

Entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=-N}^{k=N} f(k) + \sum_{P \in P} \operatorname{Res}(g(z), P) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} f(k) + \sum_{i=1}^m \operatorname{Res}(\pi f(z) \cot \pi z, z_i) = 0$$

lo que concluye el resultado.

b) Con esto: considerando

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2} \quad \text{se tiene que los polos de } f$$

son $z = ai$; $z = -ai$, y además

$$\cdot \operatorname{Res}(f, ai) = \frac{1}{2ia} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Res}(g(z), ai) = \frac{1}{2ia} \pi \cotg(\pi i)$$

$$\cdot \operatorname{Res}(f, -ai) = -\frac{1}{2ia} \quad \operatorname{Res}(g(z), -ai) = \frac{1}{-2ai} \pi \cotg(-\pi i)$$

De modo que

$$\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{1}{2ia} \pi \left(2 \cotg(\pi ai) \right) = \frac{\pi}{a} \left(\cotgh(\pi a) \right)$$