Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Octubre 2009 Tiempo: 3:00 hrs.

CONTROL 2: MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Problema 1.

a) Encuentre el radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in}}{2n+1}\left(\frac{2}{3i}\right)^n (z+4i)^n$.

b) Encuentre la serie de Taylor de $f(z) = z\log(z)$ en torno a $z_0 = 1+i$ y determine su radio de convergencia.

c) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f''(z) = 2f(z) + 1$ con $f(0) = 1, f'(0) = 0$. Encuentre la serie de potencias de f en torno a 0 y determine su radio de convergencia.

d) Sea f holomorfa en $\mathbb{C}$. Pruebe que si $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$, o $|f|$ es constante, entonces f es constante.

Problema 2.

a) Calcule $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{1}{z^2 \operatorname{senh}(z)} dz$, con la circunferencia $|z| = 4$ recorrida en sentido antihorario.

b) Pruebe que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(2\alpha\cos\theta)d\theta$

Indicación: Comience probando que $\displaystyle\left(\frac{\alpha^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{\alpha^n \exp(\alpha z)}{n! z^{n+1}} dz$.

Problema 3.

a) Calcule $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{a + \operatorname{sen}^2\theta} d\theta$ con $a > 0$.

b) Calcule $\displaystyle\int_0^{\infty} \exp(-x^2)\cos(2\beta x)dx$ donde $\beta > 0$.

Indicación: Integre $f(z) = \exp(-z^2)$ sobre el rectángulo de vértices $R, R+i\beta, -R, -R+i\beta$ y considere el límite $R \to \infty$ probando que las integrales sobre los lados verticales tienden a cero.