Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 23 de Octubre de 2008. Tiempo: 3:00 hrs.

CONTROL 2: MA2A2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Problema 1. A lo largo de esta pregunta f denotará una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

(a) (2 pts.) Demuestre que $f(z) = \alpha z + z_0$, para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ dados, son las únicas funciones holomorfas de la forma $f(z) = u(x) + iv(y)$, donde $z = x + iy$.

(b) (2 pts.) Demuestre la equivalencia: Existe un natural $k \in \mathbb{N}$ y dos complejos a y b tales que $|f(z)| \leq a + b|z|^k$ para todo $z \in \mathbb{C}$ ssi f es un polinomio de grado k.
Indicación: Utilice las desigualdades de Cauchy.

(c) Suponga que $f(z)/z \to 0$ cuando $|z| \to +\infty$.

(i) (1 pto.) Demuestre que existen $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $|f(z)| \leq a + b|z|$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
Indicación: Muestre que la función $g(z) = (f(z) - f(0))/z$ puede extenderse de manera holomorfa a todo $\mathbb{C}$.

(ii) (1 pto.) Utilice la parte (b) para concluir que f es necesariamente constante en todo $\mathbb{C}$.

Problema 2.

(a) (2 pts.) Encuentre los discos de convergencia para las siguientes series:

$$(i) \sum_{n\geq 1} n^{1/n}(z-1)^n, \qquad (ii) \sum_{n\geq 1} n!(z-i)^{n!}.$$

(b) (2 pts.) Obtenga las series de potencias o de Laurent, según corresponda, en torno a $z_0 = 0$ para las siguientes funciones:

$$(i)\ f(z) = \log(1-z^2), \qquad (ii)\ f(z) = \frac{1}{z^3}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

Indique también la mayor región donde estas expansiones son válidas.
Indicación: Recuerde que si $|w| < 1$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} w^n = 1/(1-w)$.

(c) (2 pts.) Integre las funciones de la parte (b) sobre la curva $\Gamma = \partial D(0, 1/2)$ que corresponde a la frontera del disco $D(0, 1/2)$, orientada en sentido anti-horario.

Problema 3.

(a) (3 pts.) Para $a > 1$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, calcule las integrales

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\theta)}{a - \cos\theta} d\theta \qquad \text{y} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{a - \cos\theta} d\theta.$$

(b) (3 pts.) Calcule las siguientes integrales impropias:

$$(i) \int_0^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 - 4}\, dx, \qquad (ii) \int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2 + \pi^2)^2}\, dx.$$