Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2002 – Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Clase Auxiliar N°8

P1. Determine el radio convergencia de las siguientes series de potencias en la variable $z \in \mathbb{C}$:

$$(a)\ \sum_{k\geq 1}(\log(k))^2 z^k \qquad (b)\ \sum_{k\geq 0}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2} z^k \qquad (c)\ \sum_{k\geq 0} k!\,(z-i)^{k!}$$

$$(d)\ \sum_{k\geq 0}\frac{3^k k^3 (k!)^3}{(3k)!} z^{3k} \qquad (e)\sum_{k\geq 0} k^2 (z+2)^{2^k} \qquad (f)\sum_{k\geq 1}(\log(k))^k (z+1)^{k^2}$$

Indicación: utilice la aproximación de Stirling, que establece la siguiente relación para el factorial de un número $k \in \mathbb{N}$ muy grande:

$$k! \approx \sqrt{2k\pi}\left(\frac{k}{e}\right)^k$$

P2. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ una sucesión de números complejos y $R > 0$ una constante (eventualmente $R = +\infty$). Suponga que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, tiene radio de convergencia igual a R. Así, considere $\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ y $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ la función definida por:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad, \forall z \in \mathcal{D}.$$

(a) Demuestre que para todo $r \in (0, R)$ se tiene que:

$$\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2\, r^{2n}$$

Indicaciones: utilice la fórmula de Cauchy para el producto de series numéricas, la cual establece que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ son dos sucesiones tales que la series $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ y $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ convergen absolutamente, entonces:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} y_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}\right).$$

Además recuerde que:

- $|f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)}$, $\forall z \in \mathcal{D}$.
- la serie de potencias que define a la función f converge uniformemente a f en el dominio $\mathcal{D}$. A la hora de realizar cálculos, esto le permite a usted intercambiar el orden entre una integral definida y una suma infinita.

(b) Utilice el resultado anterior para demostrar que para todo $\xi \in \mathbb{R}$ se cumple lo siguiente:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2\xi\cos(\theta)}d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\xi^n}{n!}\right)^2$$

<u>Problemas propuestos:</u>

1. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[0,1]$. Demuestre que la función $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$h(z) := \int_0^1 f(t)\cos(zt)\,dt\,, \forall z \in \mathbb{C},$$

es *entera*, es decir, analítica en todo $\mathbb{C}$.

2. Suponga que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ es una sucesión de números complejos y $R > 0$ es una constante (eventualmente $R = +\infty$) tal que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, tiene radio de convergencia igual a R. Sea $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función definida por:

$$h(z) := \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n z^n}{n!} \quad , \forall z \in \mathbb{C}.$$

Demuestre que la función h es entera, y que para todo $r \in (0, R)$ existe una constante $M > 0$ tal que:

$$|h(z)| \leq M e^{\frac{|z|}{r}} \quad , \forall z \in \mathbb{C}.$$