

Clase Auxiliar N°7

P1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y no vacío y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función tal que:

- existen $\hat{u}, \hat{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables en todo Ω que permiten expresar f en coordenadas cartesianas, es decir, para cualquier $(x, y) \in \Omega$ se escribe $z = x + iy$ y $f(z) = \hat{u}(x, y) + i\hat{v}(x, y)$.
- existen $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables en todo Ω que permiten expresar f en coordenadas polares, es decir, para cualquier $(x, y) \in \Omega$ se escribe $z = re^{i\theta}$ (con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \arg(z) = \arctan(y/x)$) y $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$.

- (a) Demuestre que para todo $(x, y) \in \Omega$ (escrito en ambos sistemas de coordenadas) se tiene que:

$$u(r, \theta) = \hat{u}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \quad , \quad v(r, \theta) = \hat{v}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

- (b) Demuestre que la función f es analítica en Ω si y sólo si f satisface las *ecuaciones de Cauchy – Riemann en coordenadas polares*, es decir:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \frac{\partial v}{\partial r}(r, \theta) \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial \theta}(r, \theta) = r \frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta) \quad , \quad \forall (r, \theta) \in \Omega.$$

De tenerse estas condiciones, verifique además que para todo $(r, \theta) \in \Omega$ se tiene:

$$f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta) + i \frac{\partial v}{\partial r}(r, \theta) \right) e^{-i\theta} \quad , \quad z = re^{i\theta}.$$

P2. El objetivo de este problema es determinar la rama principal del arco – tangente complejo, su dominio de analiticidad y una expresión para su derivada en cada punto de dicho dominio. Para ello, proceda como se indica a continuación:

- (a) Dado $w \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$, utilice la rama principal del logaritmo complejo para determinar el conjunto solución de la siguiente ecuación (en la variable $z \in \mathbb{C}$):

$$\tan(z) = w.$$

- (b) Recordando que el dominio de analiticidad de la rama principal del logaritmo complejo es $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, deduzca el dominio de diferenciabilidad $\mathcal{D}$ de la rama

principal del arco – tangente. Para ello, estudie previamente el recorrido de la función de variable real $f :]-\infty, 0] \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(t) = \frac{1-t}{1+t}, \quad \forall t \in]-\infty, 0] \setminus \{-1\}.$$

- (c) Finalmente, utilice la regla de la cadena para calcular la derivada del arco – tangente complejo en cada punto de $\mathcal{D}$.

Problema propuesto: utilice esta metodología para determinar las ramas principales del arco – seno complejo y arco – coseno complejo.