Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2002 – Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Clase Auxiliar N°6

P1. En este problema, todo punto $z \in \mathbb{C}$ se escribirá en su forma cartesiana, es decir, $z = x + iy$, en donde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Para las siguientes funciones de variable compleja, que están definidas para todo $z \in \mathbb{C}$, determine la región de $\mathbb{C}$ en la que cada una es analítica (es decir, holomorfa) y calcule su derivada en cada punto de dicha región:

(a) $f(z) = \overline{z}$
(b) $f(z) = e^x(\cos(y) - i\,\mathrm{sen}(y))$
(c) $f(z) = e^{-x}(\cos(y) - i\mathrm{sen}(y))$
(d) $f(z) = e^{-y}(z^3 + 1)(\cos(x) + i\mathrm{sen}(x))$

P2. (a) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función diferenciable (en el sentido complejo) en el punto $z_o \in \Omega$. Demuestre que $f'(z_0) = 0$.

(b) Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo por caminos, y $g : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ una función analítica. Demuestre que si $|g|$ es constante en $\mathcal{D}$, entonces g también es constante en $\mathcal{D}$.

(c) Sea $w \in \mathbb{C}$ fijo, y definamos $h(z) := |z - w|(z - w), \ \forall z \in \mathbb{C}$. Demuestre que la función h sólo es diferenciable en el punto w.

P3. (a) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $u, v : \ \Omega \to \mathbb{R}$ dos funciones de clase $\mathcal{C}^2$ en Ω (visto como sub – conjunto de $\mathbb{R}^2$). Suponga que la función $f : \Omega \to \mathbb{C}$, definida por $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y), \ \forall (x, y) \in \Omega$, es analítica en Ω. Demuestre que las funciones u y v son *armónicas* en Ω, esto es,

$$\Delta u(x, y) = \Delta v(x, y) = 0, \qquad \forall (x, y) \in \Omega.$$

(b) Suponga ahora que $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es un conjunto abierto y *simplemente conexo*, y que la función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^2$ y armónica en Ω. Demuestre que existe una función $v : \Omega \to \mathbb{R}$ que es de clase $\mathcal{C}^2$ en Ω, armónica en Ω y que determina que la función $f(x + iy) := u(x, y) + iv(x, y), \ \forall (x, y) \in \Omega$, sea analítica en Ω.

Nota: en tal caso, se dice que las funciones u y v son *armónicas conjugadas* en Ω.