

**MA26B Matemáticas Aplicadas.** Semestre 2007. Secciones 1, 2 y 4

**Profesores:** Felipe Álvarez, Juan Diego Dávila, Héctor Ramírez C.

## Control 1

- P1.** (a) (4 pts.) Sea  $r : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada por **longitud de arco**. En lo que sigue  $T, N, B$  denotan el triedro de Frenet y  $\kappa, \tau$  la curvatura y la torsión. Sea  $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  la esfera unitaria y suponga que  $r$  verifica:

$$r(t) \in S \quad \forall t \in [a, b], \quad N(t) \text{ coincide con el vector normal interior de } S$$

- i) Derivando la relación  $N(t) = -r'(t)$  y utilizando las fórmulas de Frenet probar que  $\kappa = 1$  y  $\tau = 0$ .  
Deducir que  $r$  es una curva plana. Es posible que  $N(t) = r(t)$ ?  
ii) Suponiendo adicionalmente que  $r(0) = (0, 1, 0)$  y  $r'(0) = (0, 0, 1)$  dar una fórmula explícita para  $r(t)$ .  
(b) (2pts.) Calcule la integral de trabajo  $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  para el campo vectorial  $\vec{F} = (x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy)$  sobre la hélice  $\Gamma$  que une los puntos  $P = (1, 0, 0)$  y  $Q = (1, 0, 1)$  dando una sola vuelta.

- P2.** Considere el campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z) = (\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2})$  y sea  $S$  la superficie de la elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

- (a) Muestre que el vector normal  $\hat{n}$  a la superficie  $S$  en un punto  $(x_0, y_0, z_0) \in S$  es paralelo al campo  $\vec{F}$ .  
(b) Sea  $d(x_0, y_0, z_0)$  la distancia desde el origen al plano tangente a la elipsoide en  $(x_0, y_0, z_0)$ . Pruebe que  $d = 1/\vec{F} \cdot \hat{n}$  en  $S$ .  
(c) Demuestre que

$$\int \int_S \frac{1}{d} dA = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right).$$

**Indicación:** Recuerde que el volumen de la elipsoide antes descrita es igual a  $\frac{4\pi}{3}abc$ .

- P3.** (a) Sea  $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$ . Demuestre, usando la regla de Leibnitz:  $\frac{\partial}{\partial u} \int_a^b \varphi(\vec{r}, t) dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial u} \varphi(\vec{r}, t) dt$  donde  $\vec{r} = (x, y, z)$  y  $u$  representa cualquier variable cartesiana, que

$$\vec{\nabla} \times \int_a^b \varphi(\vec{r}, t) dt = \int_a^b \vec{\nabla} \times \varphi(\vec{r}, t) dt.$$

- (b) Considere el campo vectorial  $\vec{F}(\vec{r}) = g(r)\hat{\theta}$  expresado en coordenadas esféricas, donde  $r = \|\vec{r}\|$  y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función escalar. Verifique que  $\text{div } \vec{F} = 0$  y pruebe que

$$\vec{\nabla} \times [\vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r}] = 2t\vec{F}(t\vec{r}) + t^2 \frac{d}{dt} \vec{F}(t\vec{r}).$$

En general, se puede mostrar (no necesita hacerlo) que si  $\vec{F}$  un campo vectorial tal que  $\text{div } \vec{F} = 0$  en una bola  $B$  de  $\mathbb{R}^3$  centrada en el origen, entonces la anterior igualdad es válida en  $B$ .

- (c) Definamos el campo vectorial  $\vec{G}(\vec{r}) = \int_0^1 [\vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r}] dt$ . Concluya que  $\vec{\nabla} \times \vec{G} = \vec{F}$  en  $B$ .

**OTRA P3.** Sea  $P$  el paraboloides de ecuación  $z = x^2 + y^2$  y considere las siguientes curvas orientadas:

$C_1$ : intersección de  $P$  con  $y = 0$ , restringida a  $x \geq 0$ ,  $0 \leq z \leq 1$ , orientada de  $(1,0,1)$  a  $(0,0,0)$

$C_2$ : intersección de  $P$  con  $x = 0$ , restringida a  $y \geq 0$ ,  $0 \leq z \leq 1$ , orientada de  $(0,0,0)$  a  $(0,1,1)$

$C_3$ : intersección de  $P$  con  $z = 1$ , restringida a  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ , orientada de  $(0,1,1)$  a  $(1,0,1)$

Definamos  $C$  como la unión de  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ .

Usando el teorema de Stokes calcule

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde  $\vec{F}$  viene dada en coordenadas cilíndricas  $r, \theta, z$  por

$$\vec{F} = (\cos(r) + 2\theta r)\hat{r} + \left(\frac{e^\theta}{r} + r + zr^3\right)\hat{\theta} + (e^z + \sin(\theta))\hat{z}.$$

**Tiempo: 3 horas**