

PROBLEMAS GUIA CONTROL 1

PROBLEMA 1

Probar que la integral de línea

$$\int_{\overline{PQ}} (x^2 - yz)dx + (y^2 - zx)dy +$$

$(z^2 - xy)dz$ es independiente del camino de integración entre los puntos $P(1,1,1)$ y $Q(2,3,4)$. Hallar su valor.

PROBLEMA 2

Una partícula se mueve sobre una cierta curva, con velocidad \vec{x}' , de magnitud constante 1 y curvatura constante 1. Si se designa por $\theta(t)$ al ángulo ($0 \leq \theta \leq \pi$) entre los vectores $\vec{x}'(t)$ y $\vec{x}''(t)$ en el instante t , probar que la torsión satisface la ecuación

$$|\tau(t)| = \|\vec{x}''(t)\| \sin(\theta(t)).$$

PROBLEMA 3

Algo de Matemática Aplicada a la Física

- 1.- Sea \vec{F} un campo de fuerza definido sobre $A \subseteq \mathbb{R}^3$, es decir, $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, actúa sobre una partícula de masa m . Probar que el trabajo para mover la partícula desde \vec{p}_0 hasta \vec{p}_1 es igual a

$$W = \frac{1}{2}m(|\vec{v}_1|^2 - |\vec{v}_0|^2)$$

donde \vec{v}_1 y

\vec{v}_0 son respectivamente las velocidades en \vec{p}_1 y \vec{p}_0 .

- 2.- Un fluido se desplaza en el plano xy de modo que cada partícula se mueve en línea recta desde el origen. La velocidad de una partícula a la distancia r del origen es ar^n donde a y n son constantes.
 - (a) Determinar los valores de a y n para los cuales el campo vectorial de velocidad es el gradiente de un cierto campo escalar.

- (b) Hallar una función potencial de la velocidad siempre que éste sea el gradiente de algún campo escalar.

PROBLEMA 4

Hallar el área de la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, que se encuentra an el interior del cilindro $x^2 + z^2 = 2az$.

PROBLEMA 5

Calcule el flujo definido por el campo

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(e^z \sin y + xy^2z, e^x \cos z + x^2yz, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

a través de la

superficie lateral del cilindro de radio 1 y altura 2, de la figura.

Gauss. Calcule el flujo que sale a través de las tapas directamente. *Indicación: Calcule el flujo total que sale del cilindro incluyendo las tapas y usando el teorema de*

Gauss. Calcule el flujo que sale a través de las tapas directamente.

PROBLEMA 6

Un sólido situado en el primer octante está acotado por los planos: $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$ y los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$; $x^2 + z^2 = a^2$. Si \vec{f} es el campo vectorial definido por

$$\vec{f}(x, y, z) = 2yz\hat{i} + (x + 3y - 2)\hat{j} - (x^2 + z)\hat{k}.$$

Calcule el valor de la integral

$$\iint_{\Sigma} \nabla \times \vec{f} \cdot \hat{n} d\Sigma$$

tomada sobre la

superficie del sólido orientado según la normal exterior.

PROBLEMA 7

Sea $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = \|\vec{r}\|$ y $\Sigma^+ = \partial \{ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 : a \leq$

$r \leq b$ orientada hacia el exterior. Sean $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ambas de clase \mathcal{C}^1

tales que:

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r^2)\vec{r}$$

- (a) Verificar que $r^2 \nabla \vec{F}(\vec{r}) = \frac{d}{dr} (r^3 f(r^2))$.
 (b) Concluir que $\oint_{\Sigma^+} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 4\pi [b^3 f(b^2) - a^3 f(a^2)]$.

Con la misma notación, sea C^+ una curva de extremos $(0,0,0)$ y $A = (0,0,a)$ regular por trozos recorrida

desde $(0,0,0)$ hacia A .

- (c) Calcular $\nabla \times \vec{F}(\vec{r})$.
 (d) Verificar que $\int_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} \int_0^a f(t) dt$.

PROBLEMA 8

Sean $u(x, y)$ y $v(x, y)$ dos funciones escalares de clase C^1 en \mathbb{R}^2 . Considere los campos vectoriales definidos por:

$$\vec{w}(x, y, z) = u(x, y)\hat{i} + v(x, y)\hat{j} \quad y$$

$$\vec{w}_1(x, y, z) = v(x, y)\hat{i} - u(x, y)\hat{j}.$$

- (i) Pruebe que \vec{w} y \vec{w}_1 son ambos conservativos si y sólo si satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann

{

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}$$

Decimos que dos funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son conjugadas cuando satisfacen las condiciones de

Cauchy-Riemann.

- (ii) Pruebe que si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son conjugadas y de clase C^2 entonces ambas son armónicas, es decir, $\Delta u = \Delta v = 0$. Pruebe además que $\nabla u \cdot \nabla v = 0$.
 (iii) Demuestre que si $u(x, y)$ es armónica entonces existe una función $v(x, y)$ conjugada de u .

Indicación: Prueba que el campo definido por

$$\vec{w}_2(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\hat{i} - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\hat{j}$$

es conservativo.

PROBLEMA 9

Calcular el elemento de volumen en coordenadas parabólicas $(\varepsilon, \eta, \varphi)$ con ecuaciones de transformación:

$$x = \varepsilon\eta \cos(\varphi)$$

$$y = \varepsilon\eta \sin(\varphi)$$

$$z = \frac{1}{2(\eta^2 - \varepsilon^2)}.$$

Identifique geoméricamente las nuevas coordenadas y justifique el nombre de coordenadas parabólicas de este sistema.