

CONTROL I MA 2002, 2009/2

10 de septiembre, 2009

Prof. F. Álvarez, R. Cominetti, J. Dávila, H. Ramírez

Tiempo: 3 hrs.

1. a) (1pto) Bosqueje la superficie S de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$ y la curva C obtenida al intersectar S y la superficie $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

- b) (1 pto) Para el campo

$$F = \sin(\theta) \sin(\varphi)^2 \hat{r} + \sin(\varphi)^3 \cos(\theta)^2 \hat{\varphi} + (r^2 + \cos(\theta) \sin(\varphi)) \hat{\theta}.$$

expresado en coordenadas esféricas, calcule $\text{rot} F$.

- c) (4 ptos) Calcule

$$\oint_C F \cdot d\vec{r}$$

donde F es el campo en la part b) y C la curva en la parte a).

2. a) (1 pto) Definamos

$$F(x, y, z) = (2x + y \sin(x - y), -y + y \sin(x - y), (x^2 + y^2)^{1/4} - z \sin(x - y))$$

¿En qué región puede afirmar que F es de clase C^1 .

- b) (5 ptos) Calcule

$$\iint_S F \cdot \hat{n} dA$$

donde S es la superficie $x^2 + y^2 = e^z$, y $0 \leq z \leq 1$, orientada según normales \hat{n} que apunten alejándose del eje z .

3. a) (2 ptos) Verifique que

$$F = (y^2 \cos(x) + z^3) \hat{i} + (2y \sin(x) - 4) \hat{j} + (3xz^2 + 2z) \hat{k}$$

es un campo conservativo y encuentre un potencial escalar.

- b) (2 ptos) Calcule $\int_{\Gamma} G \cdot d\vec{r}$ donde

$$G = (y^2 \cos(x) + 2z^3) \hat{i} + (2y \sin(x) - 4) \hat{j} + (3xz^2 + 2z) \hat{k}$$

y Γ es la curva que consta del arco de $y = x^2$, $z = 0$ del origen al punto $(1, 1, 0)$ junto con el segmento recto de $(1, 1, 0)$ al punto $(0, 0, 1)$.

- c) (2 ptos) Considere una superficie regular y orientable S con campo de normales \hat{n} , y $F, G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos campos vectoriales de clase C^1 tales que

$$F(x) = G(x) \quad \text{para todo } x \in S.$$

Usando una versión adecuada de la caracterización límite del rotor muestre que

$$(\text{rot} F)(x) \cdot \hat{n}(x) = (\text{rot} G)(x) \cdot \hat{n}(x) \quad \text{para todo } x \in S.$$

De un ejemplo de S , F , G que cumplan las condiciones anteriores pero

$$\text{rot} F(x) \neq \text{rot} G(x) \quad \text{para todo } x \in S.$$