

CURVAS, SUPERFICIES Y DIVERGENCIA

P1) Dados $a, b, c > 0$ tales que $c^2 = a^2 + b^2$, sea $C \subseteq \mathbb{R}^3$ la curva parametrizada por: $\vec{r}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\vec{r}(s) = a \cos(\frac{s}{c}) \hat{i} + a \sin(\frac{s}{c}) \hat{j} + b \cdot (\frac{s}{c}) \hat{k}$.

1) Muestre que el parámetro s es la longitud de arco sobre C . Calcule el triedro de Frenet: vectores tangentes, normal y binormal a la curva. Pruebe que las rectas tangentes a C forman un ángulo constante con el vector \hat{k} .

2) Pruebe que las rectas normales principales (i.e. aquellas que pasan por $\vec{r}(s)$ y tienen como dirección al vector normal $N(s)$) cortan al eje z en un ángulo constante e igual a $\pi/2$. Calcule la curvatura $k = k(s)$ y la torsión $\tau = \tau(s)$ de C . Verifique que $k/\tau = \frac{a}{b}$.

(2)

P2) Dada una curva C , se define la EVOLUTA de C como el lugar geométrico de sus centros de curvatura.

(El centro de curvatura es $C(s) = \vec{r}(s) + \frac{1}{K(s)} \vec{N}(s)$, en donde $\vec{r}(s)$ es un punto de la curva, \vec{N} es el vector normal y K la curvatura)

Sea Γ la hélice circular de parametrización: $\vec{r}(\theta) = (a \cos \theta, a \sin \theta, h\theta)$ $\theta \in \mathbb{R}$ y a una constante NO NULA.

i) Pruebe que la evoluta de la hélice Γ es una hélice con la misma generatriz y mismo paso h . Denotémosla Γ' .

ii) Demuestre que la evoluta de Γ' es Γ

iii) Pruebe que las curvaturas de Γ' y Γ son iguales, calcule el cociente entre las torsiones de ambas curvas.

P3) Sea S la esfera de radio R y $p \in \mathbb{R}^3 \setminus S$. Demuestre que

$$\iint_S \frac{dA}{\|\vec{r} - \vec{p}\|} = \begin{cases} 4\pi R & \text{si } \|\vec{p}\| < R \\ \frac{4\pi R^2}{\|\vec{p}\|} & \text{si } \|\vec{p}\| > R \end{cases}$$

P4) Hallar el área de la superficie limitada por la intersección de los cilindros $C_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2\}$ y

$$C_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = a^2\}$$

(3)

P5] Calcular el área de la parte del cono $x^2 + y^2 = z^2$ con $z \geq 0$ que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2R^2$, donde R es una constante positiva ¿Cuál es el área de la esfera que está dentro del cono?

P6] a) Sea $\vec{r}(t)$ una trayectoria en \mathbb{R}^3 con aceleración cero ($\ddot{\vec{r}} = 0$).
Pruebe que $\vec{r}(t)$ parametriza una recta o un punto.

b) Sea $\vec{r}(t)$ una trayectoria, $\vec{v}(t)$ la velocidad ($\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$) y $\vec{a}(t)$ la aceleración de una partícula de masa $m > 0$.

Sea $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de fuerzas y supongamos que $\vec{F}(\vec{r}(t)) = m\vec{a}(t)$ (2ª LEY DE NEWTON). Probar

que
$$\frac{d}{dt} [m(\vec{r}(t) \times \vec{v}(t))] = \vec{r}(t) \times \vec{F}(\vec{r}(t))$$

es decir "la tasa de cambio del momento angular es igual al torque"

¿Qué ocurre si $\vec{F}(\vec{r})$ es paralelo a \vec{r} ?

P7] Sea Γ el grafo ($G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal } y = f(x)\}$) es el grafo de $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de una función diferenciable f .

i) Determine una fórmula para la longitud de Γ

ii) Suponiendo que f es 2 veces diferenciable, pruebe que

la curvatura en el punto $(x, f(x))$ viene dado por:

(4)

$$K(x) = \frac{|f''(x)|}{|1 + f'(x)^2|^{3/2}}$$

iii) ¿Qué sucede ahora si $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$?

Se define el grafo de f como $G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tales que } z = f(x, y)\}$. Determine una fórmula para la superficie de $G(f)$ si f es diferenciable (como función de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$)
¿Es $G(f)$ regular?

P8 Dada una función continua y no nula $g: [0, l_0] \rightarrow \mathbb{R}$

pruebe que existe una curva plana $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ de longitud " l_0 " tal que su curvatura está dada por $|g| := (|g|_w = |g(x)|)$

IND: Defina $\theta(s) = \int_0^s g(t) dt$, $x(s) = \int_0^s \cos \theta(t) dt$, $y(s) =$

$\int_0^s \sin \theta(t) dt$ y estudie $\vec{\gamma}(s) = x(s)\hat{i} + y(s)\hat{j}$.

P9 Sea $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1 tal

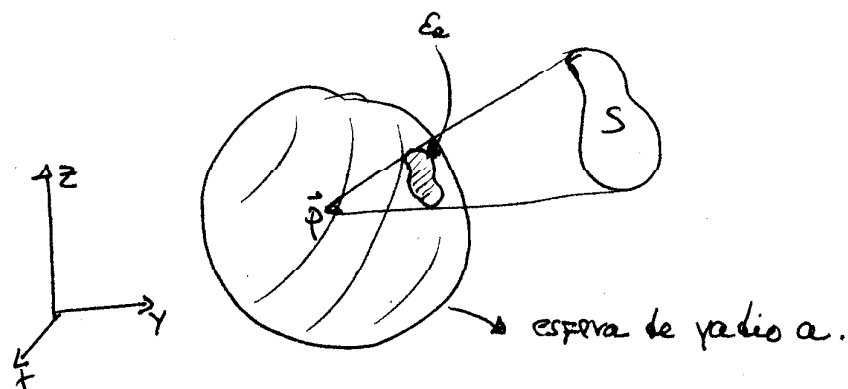
que $\|\vec{F}(\vec{r})\| \leq^{(*)} \frac{1}{\|\vec{r}\|^a + 1} \quad \forall \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \text{ con } a > 2.$

Muestre que $\int_{\mathbb{R}^3} \text{div}(\vec{F}) = 0$ [¿Qué ocurre si se cambia $(*)$ por $\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \|\vec{F}(r)\| = 0$?]

(5)

P10 Sea S una superficie suave y \vec{p} un punto tal que toda recta que pasa por \vec{p} corta a S en a lo más un punto. Sea Ω de todas las semirectas que parten de \vec{p} y pasan por S y sea E_a la intersección de Ω con la esfera (superficie esférica) de centro \vec{p} y radio a . Demuestre que:

$$S = \frac{\text{área de } E_a}{a^2} = \iint_S \frac{(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n}}{\|\vec{r} - \vec{p}\|^3} dA$$



Ω se denomina ángulo sólido de S con respecto a \vec{p} .

P11 Considere la superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ formada por los puntos del casquete esférico unitario que están por encima del plano $z=2y$. Es decir $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 2y\}$

- Bosqueje S y encuentre una parametrización regular de esta superficie
- Parametrice el borde geométrico ∂S de S , y las siguientes rectas tangentes a ∂S : la que pasa por el punto $(1, 0, 0)$, y la que pasa por el punto $(-1, 0, 0)$

- c) ¿Puede decir cuál es la superficie $S_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ de área mínima (6)
cuyo borde es ∂S ? Encuentre una parametrización de S_1 .
- d) Calcule el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x + y^2 + z^2)\hat{j} + (\bar{e}^{xz} - 2)\hat{j} + (2\bar{e}^{xz} + 1)\hat{k}$ sobre la superficie S_1 orientada con la normal exterior a la superficie cerrada $S \cup S_1$.

P12] El objetivo de este ejercicio es probar el TEOREMA DE STOKES en el caso particular en que la superficie sea una gráfica de una función C^2 :

SEA D una región en el plano que satisface las hipótesis del TEOREMA DE GREEN. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ la superficie orientada definida por la gráfica de la función $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 , y $F = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial C^1 en \mathbb{R}^3 .

Demostremos que
$$\iint_S \text{rot}(F) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Para esto, pruebe lo indicado en cada inciso:

- a) Pruebe que para todo campo $G = (G_1, G_2, G_3)$, y si S es la gráfica de la función $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces se tiene

$$\iint_S G \cdot d\vec{S} = \iint_D \left(-\frac{\partial f}{\partial x} G_1 - \frac{\partial f}{\partial y} G_2 + G_3 \right) dx dy \quad (*)$$

b) Probar directamente de la definición de integral vectorial ⁽⁷⁾ sobre trayectorias, que:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_D H \cdot d\vec{r}$$

en donde H es el campo vectorial en \mathbb{R}^2 dado por

$$H(x, y) = \left(F_1(x, y, f(x, y)) + F_3(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), F_2(x, y, f(x, y)) + F_3(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

c) Aplique el Teorema de Green al campo H dado en el inciso anterior.

d) Aplique la igualdad (*) al campo $G = \text{rot}(F)$ y concluya

P13) ESPIRALES DE MCLAURIN. Corresponden a una familia de curvas en el plano que al ser descritas en coordenadas polares las variables ρ y θ satisfacen la relación:

$$\rho(\theta) = a (\sin(n\theta))^{\frac{1}{n}}$$

donde $a > 0$ y $n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ corresponde al orden de la espiral

Pruebe que la curvatura de una espiral de McLaurin de orden n es: (8)

$$k(\theta) = \frac{n+1}{a} (\sin(n\theta))^{\frac{n-1}{n}}$$

P14 | Probar las siguientes igualdades para los campos

$u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ y las funciones $f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

a) $\operatorname{div}(fu) = f \operatorname{div}(u) + \langle u, \nabla f \rangle$

b) $\operatorname{div}(u \times v) = \langle v, \nabla \times u \rangle - \langle u, \nabla \times v \rangle$

c) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} u) = 0$

d) $\nabla \times (fu) = f(\nabla \times u) + \nabla f \times u$

e) $\nabla \times (u \times v) = u \operatorname{div}(v) - v \operatorname{div}(u) - \langle u, \nabla \rangle v + \langle v, \nabla \rangle u$

f) $\nabla \times (\operatorname{rot} u) = \nabla(\operatorname{div}(u)) - \Delta u$

g) $\nabla \times (\nabla f) = 0$

h) $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$

i) $\nabla \langle u, v \rangle = \langle u, \nabla \rangle v + \langle v, \nabla \rangle u + u \times (\nabla \times v) + v \times (\nabla \times u)$

En donde $\operatorname{rot}(u) = \nabla \times u$

$\Delta u = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{pmatrix}$ donde $\Delta u_i = \nabla(\nabla u_i) = \operatorname{div}(\nabla u_i)$
 \downarrow
gradiente

$\langle u, \nabla \rangle = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}$

(9)

P15] Sea $\vec{J} = (J_1, J_2, J_3)$ un campo vectorial suave (continuo, diferenciable, etc), que se anula fuera de $\overline{B_1(0)}$ la bola unitaria (cerrada) centrada en el origen y que satisface $\text{div}(\vec{J}) = 0$.

a) Utilice la igualdad a) del problema N° 14 para probar que para $f: \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ suave, y R una vecindad de $\overline{B_1(0)}$, se tiene que:

$$\int_{\overline{B_1(0)}} (\nabla f) \cdot \vec{J} \, dx \, dy \, dz = 0$$

INDICACIÓN: Pruebe que \vec{J} sobre $\partial \overline{B_1(0)}$ es igual a cero (recuerde que \vec{J} es suave i.e. continua), y utilice la igualdad a))

b) Pruebe que:

$$\int_{\overline{B_1(0)}} J_1 \, dx \, dy \, dz = 0$$

Indicación: Aplique la parte anterior con una f adecuada.

P16 Sea Γ una curva en \mathbb{R}^2 . El centroide de Γ 10
 es el punto $C = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ con coordenadas dadas
 por las integrales de línea $\bar{x} = \frac{1}{L(\Gamma)} \int_{\Gamma} x d\vec{r}$;
 $\bar{y} = \frac{1}{L(\Gamma)} \int_{\Gamma} y d\vec{r}$. En donde $L(\Gamma)$ es el largo de Γ .

- a) Sea Γ una elipse centrada en el origen y orientada según los ejes x e y . Muestre que una parametrización de Γ viene dada por $\vec{r}(\theta) = a \cos \theta \hat{i} + b \sin \theta \hat{j}$, en el caso en que $\Gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \}$ con a, b constantes reales.
- b) Sea ahora Γ una elipse cualquiera, NO necesariamente centrada en el origen ni orientada según los ejes x e y . Encuentre una parametrización de Γ . (Generalice el caso anterior cambiando \hat{i} y \hat{j} adecuadamente)
- c) Pruebe que el centroide de cualquier elipse $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ es igual a su centro (Al calcular las integrales pueden serle útiles argumentos de periodicidad o simetría y paridad).