

Control # 1 - MA2002

Profesor: Juan Diego Dávila
Auxiliares: Cristopher Hermosilla, Gonzalo Muñoz

P1. Considere el potencial $U(r) = -\frac{1}{r}e^{-\alpha r}$ (coordenadas esféricas) donde $\alpha > 0$ es una constante dada.

- Sea $\vec{F} = -\nabla U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$. Encuentre explícitamente \vec{F} .
- Calcule directamente el flujo de \vec{F} a través del casquete esférico $r = a$ ($a > 0$) orientado según la normal exterior.
- Pruebe que $\Delta U = \alpha^2 U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.
- Demuestre que si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ es un abierto acotado que contiene al origen, cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular a trozos y orientada según la normal exterior, entonces

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 4\pi - \alpha^2 \iiint_{\Omega} U dV$$

¿Contradice este resultado el teorema de la divergencia de Gauss? Explique.

P2. a) Calcule la integral de trabajo de

$$\vec{F}(x, y, z) = (6zy^2 + \cos(x^2))\hat{i} + (xz \sin(xz) + 2x^3)\hat{j} + (xy \sin(xy) - 2x^3)\hat{k}$$

sobre Γ , que consta de C_1 seguido de C_2 (ver Figura 1), donde

$$C_1 : x^2 + y^2 = 1, z = 0, y \geq 0 \quad \text{de } (1, 0, 0) \text{ a } (-1, 0, 0)$$

$$C_2 : x^2 + z^2 = 1, y = 0, z \geq 0 \quad \text{de } (-1, 0, 0) \text{ a } (1, 0, 0)$$

- Sea Γ una curva simple, cerrada y regular por trozos contenida en el plano XY . Suponga que Γ está parametrizada en coordenadas polares:

$$x(\theta) = r(\theta) \cos(\theta), \quad y(\theta) = r(\theta) \sin(\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

donde $r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^+$ es C^1 y periódica. Sea Ω la región encerrada por Γ . Denotemos $A(\Omega)$ el área de Ω . Usando una de las fórmulas para el área como integral de trabajo que se obtiene del teorema de Green, demuestre que

$$A(\Omega) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r(\theta)^2 d\theta.$$

P3. a) Pruebe que si f y \vec{F} son campos C^1 (escalar y vectorial, respectivamente) se tiene

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{F}) = f\vec{\nabla} \times \vec{F} + \nabla f \times \vec{F}$$

- Sea $\vec{F}(x, y, z) = (-\frac{y}{x^2 + y^2} + 2xy)\hat{i} + (\frac{x}{x^2 + y^2} + x^2)\hat{j}$

- Determinar en qué región \vec{F} es C^1 y calcular $\vec{\nabla} \times \vec{F}$.
- Sean C_1 y C_2 dos arcos circunferenciales en el plano XY que unen los puntos $A = (1, 0, 0)$ y $B = (-1, 0, 0)$ como en la Figura 2. Calcule el trabajo de \vec{F} a través de C_1 y de C_2 .
- ¿Es \vec{F} conservativo?

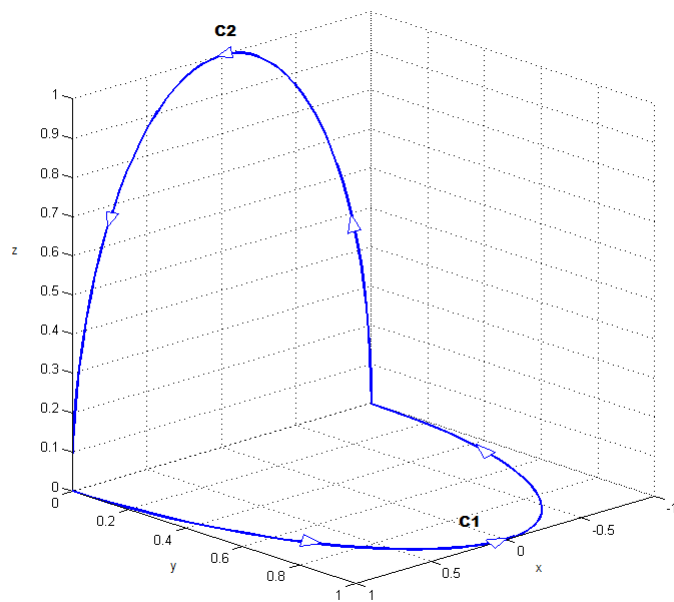


Figura 1: P2 parte (a)

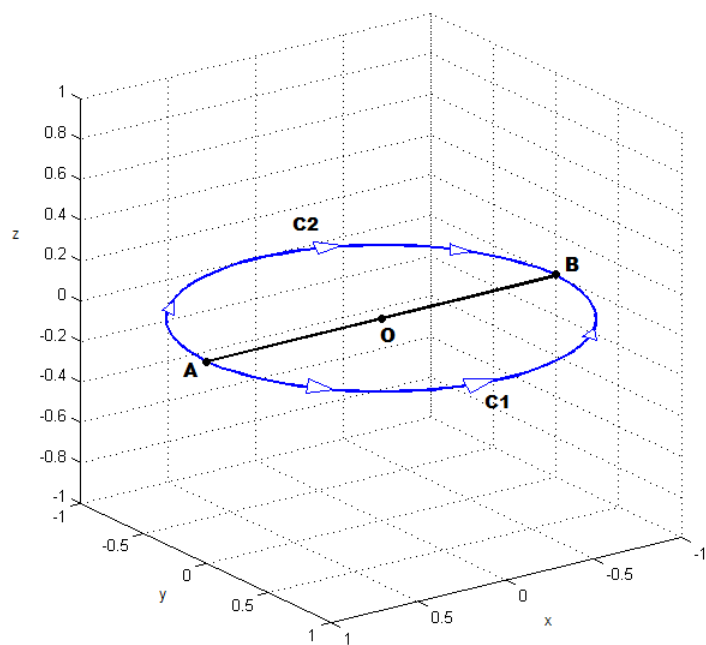


Figura 2: P3 parte (b)