Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 15 de Noviembre de 2011. Tiempo: 3:00 hrs.

CONTROL 1: MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Problema 1.

Sea S la superficie de la elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + y^2 + z^2 = 1.$$

(a) (1 pto.) Dado $\vec{x} \in S$ encuentre la normal unitaria exterior $\hat{n}$ de S en $\vec{x}$. Para ello use la función

$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + y^2 + z^2 - 1.$$

Note que S corresponde a la superficie de nivel cero de g. Si llamamos Π al plano tangente de S en $\vec{x}$ recuerde entonces que el gradiente de g en $\vec{x}$ es perpendicular a Π.

(b) (1 pto.) Encuentre la ecuación de Π. Muestre que el vector $\vec{p} = (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n}$ verifica la ecuación de Π y que es perpendicular a éste. Notar que $f = \vec{x} \cdot \hat{n}$ corresponde a la distancia entre el origen y Π.

(c) (1 pto.) Muestre que

$$\iint_S f \, dA = 4\pi a.$$

(d) (1 pto.) Considere el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{a^2}, y, z\right).$$

Muestre que $\vec{F}$ es paralelo a $\hat{n}$.

(e) (1 pto.) Pruebe que $f = 1/(\vec{F} \cdot \hat{n})$ sobre S.

(f) (1 pto.) Muestre que

$$\iint_S \frac{1}{f} \, dA = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{2a^2 + 1}{a}\right).$$

Problema 2.

Sea $\vec{F}$ campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Se puede mostrar que $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$ para

$$i)\ \vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), 0, 0); \quad ii)\ \vec{F}(x, y, z) = (0, F_2(x, y, z), 0); \quad iii)\ \vec{F}(x, y, z) = (0, 0, F_3(x, y, z)).$$

(a) (2 ptos.) Verifique la aseveración sólo en uno de los tres casos.

(b) (2 ptos.) Usando las tres afirmaciones anteriores probar que $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$ para $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

(c) Sea Ω una región de $\mathbb{R}^3$ de borde $S := \partial\Omega$, superficie cerrada regular por trozos. Probar, usando los dos métodos siguientes, que

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = 0$$

- (0,5 ptos.) El Teorema de Gauss.
- (1.5 ptos.) El Teorema de Stokes. Indicación: Considere cortar la superficie S en dos mediante un plano paralelo a XY

Problema 3.

La superficie S corresponde a la unión de 3 pedazos. Por una parte, 2 sectores circulares horizontales de radio 1, y centrados en el eje Z, de los cuales el primero corresponde a $\theta \in [0,\ \pi/4]$ y altura $z = 0$ y el segundo, $\theta \in [\pi/4,\ \pi/2]$ y altura $z = H$. El tercer pedazo es un rectángulo definido por $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq z \leq H$ y $\theta = \pi/4$. Ver Figura 1. Se orienta la superficie de modo que la normal al sector circular superior apunte hacia arriba.
Se define el campo vectorial, en coordenadas cilíndricas, $\vec{F} = \rho^2 \hat{z} + z\rho\hat{\rho}$.

(a) (3 ptos.) Usando la definición de integral de trabajo, calcule la circulación

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot \hat{t}\, ds.$$

(b) (3 ptos.) Calcule la misma circulación, pero utilizando el Teorema de Stokes.

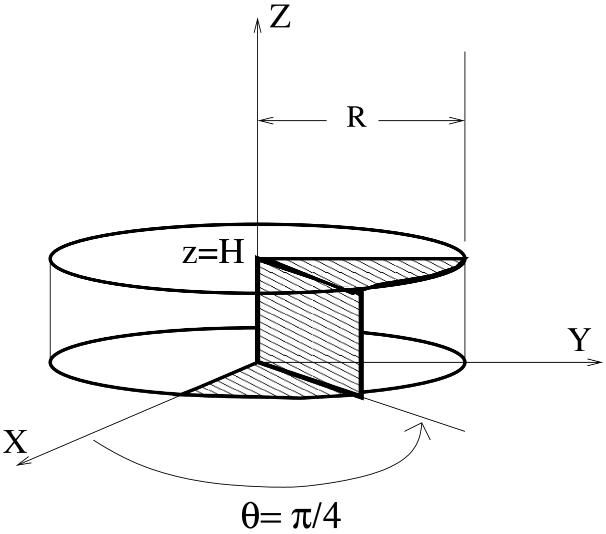

Figura 1: Superficie S del Problema 3.

Fórmulas útiles

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u F_v h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w)\right]; \quad \operatorname{rot} \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$