Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 10 de septiembre de 2009. Tiempo: 3:00 hrs.

CONTROL 1: MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Problema 1.

(a) (1pto) Para el campo

$$\vec{F}(\vec{r}) = (2\theta + \sqrt{2+\rho^2})\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}e^{\theta^2}\hat{\theta} + (\theta^2 + \log(1+z^2))\hat{z}$$

expresado en coordenadas cilíndricas, calcule rot$\vec{F}$.

(b) (1 pto) Bosqueje la superficie S de ecuación $x^2+y^2=1$, $0 \le z \le x$, $y \ge 0$.

(c) (4 ptos) Calcule

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde $\vec{F}$ es el campo en la parte a) y S la superficie en la parte b) (∂S está orientada de $(1,0,0)$, a $(0,1,0)$ a $(1,0,1)$).

Problema 2.

(a) (1 pto) Definamos

$$\vec{F}(\vec{r}) = (2x + y\sin(x-y), -y + y\sin(x-y), (x^2+y^2)^{1/4} - z\sin(x-y))$$

¿En qué región puede afirmar que $\vec{F}$ es de clase C^1?

(b) (5 ptos) Calcule

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA$$

donde S es la superficie $x^2+y^2=e^z$, y $0 \le z \le 1$, orientada según normales $\hat{n}$ que apunten alejándose del eje z.

Indicación: Puede argumentar que ciertas integrales que aparecen son cero por simetría.

Problema 3.

(a) (1 pto) Verifique que

$$\vec{F}(\vec{r}) = (y^2\cos(x) + z^3)\hat{\imath} + (2y\sin(x) - 4)\hat{\jmath} + (3xz^2 + 2z)\hat{k}$$

es un campo conservativo y encuentre un potencial escalar.

(b) (3 ptos) Calcule $\int_\Gamma \vec{G} \cdot d\vec{r}$ donde

$$\vec{G}(\vec{r}) = (y^2\cos(x) + 2z^3)\hat{\imath} + (2y\sin(x) - 4)\hat{\jmath} + (3xz^2 + 2z)\hat{k}$$

y Γ es la curva que consta del arco de $y = x^2$, $z = 0$ del origen al punto $(1,1,0)$ junto con el segmento recto de $(1,1,0)$ al punto $(0,0,1)$.

(c) (2 ptos) Considere una superficie regular y orientable S con campo de normales $\hat{n}$, y $\vec{F}, \vec{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dos campos vectoriales de clase C^1 tales que

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{G}(\vec{r}) \quad \text{para todo } \vec{r} \in S.$$

Muestre que

$$(\text{rot}\vec{F})(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r}) = (\text{rot}\vec{G})(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r}) \quad \text{para todo } \vec{r} \in S.$$

De un ejemplo de S, $\vec{F}$, $\vec{G}$ que cumplan las condiciones anteriores pero

$$\text{rot}\vec{F}(\vec{r}) \neq \text{rot}\vec{G}(\vec{r}) \quad \text{para todo } \vec{r} \in S.$$

Indicación: Dado $\vec{r}_0 \in S$ utilice el teorema de Stokes en en una familia de superficies adecuadas (pequeñas y centradas en $\vec{r}_0$).

Divergencia y rotor y coordenadas ortogonales.

Si $\vec{r}(u,v,w)$ es un sistema de coordenadas ortogonal y $\vec{F} = F_u\hat{u} + F_v\hat{v} + F_w\hat{w}$ es un campo C^1, entonces

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u F_v h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w)\right]$$

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$

($\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ deben tener orientación positiva, es decir, $\hat{u} \times \hat{v} = \hat{w}$.)