

CONTROL 1: MA2A2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Problema 1.

- (a) [2.0 pts.] Sea S la superficie de ecuación $x^2 + y^2 - (z - 6)^2 = 0$ para $3 \leq z \leq 6$. Bosqueje S , indique gráficamente una orientación sobre S y calcule el flujo neto a través de S del campo $\vec{F} = x(3 - z)\hat{i} + y(3 - z)\hat{j} + (3 - z)^2\hat{k}$.
- (b) [2.0 pts.] Sea $\vec{F} = yx^2\hat{i} - xz\hat{j} + 3y\hat{k}$. Considere la superficie S del paraboloides $2x = z^2 + y^2$ para $0 \leq x \leq 2$. Bosqueje S , indique gráficamente una orientación sobre S y evalúe la integral de flujo del rotor de \vec{F} a través de S .
- (c) [2.0 pts.] Determine los valores de las constantes α , β y γ para que el campo vectorial $\vec{F} = (x + 2y + \alpha z)\hat{i} + (\beta x - 3y - z)\hat{j} + (4x + \gamma y + 2z)\hat{k}$ sea conservativo, en cuyo caso encuentre un potencial para \vec{F} .

Problema 2.

- (a) [3.0 pts.] Sea Γ la curva que se obtiene de intersectar el casquete esférico unitario (centrado en el origen) con la superficie de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Considere Γ recorrida en sentido antihorario. Calcule la circulación a lo largo de Γ del siguiente campo descrito en coordenadas cilíndricas: $\vec{F}(\rho, \theta, z) = (z - \rho)\frac{\theta^2}{2}\hat{\rho} + z\theta\hat{\theta} + \frac{\theta^2}{2}\rho\hat{k}$.
- (b) [3.0 pts.] Considere el campo en coordenadas esféricas dado por $\vec{F} = r^2\hat{r} + r\theta\text{sen}^3\varphi\hat{\theta}$. Calcule $\text{div}\vec{F}$ en todo punto del dominio de diferenciabilidad de \vec{F} , vale decir, $\mathbb{R}^3 \setminus \text{Eje } Z$. Sea Ω la región de la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ que intersecta al cono infinito $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$. Defina $\Omega(\varepsilon) = \{(x, y, z) \in \Omega \mid x^2 + y^2 \geq \varepsilon^2\}$ para $\varepsilon > 0$ pequeño. Bosqueje $\Omega(\varepsilon)$ y encuentre el valor de $I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{\Omega(\varepsilon)} \text{div}\vec{F} dV$.

Problema 3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado de frontera regular a trozos $\partial\Omega$, orientada según la normal exterior. Consideremos un campo escalar ϕ de clase C^2 en un dominio $\mathcal{U} \supseteq \Omega \cup \partial\Omega$ y supongamos que ϕ es armónico en Ω , es decir, $\Delta\phi = 0$ en Ω . Sea $\vec{p} \in \text{int}(\Omega)$ y definamos la función $\psi(\vec{r}) = 1/\|\vec{r} - \vec{p}\|$ con $\vec{r} = (x, y, z)$.

- (a) [2.0 pts.] Calcule $\nabla\psi(\vec{r})$ para $\vec{r} \neq \vec{p}$. Muestre que $\Delta\psi = 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{p}\}$.
- (b) [4.0 pts.] Sea $B(\vec{p}, \delta) \subseteq \Omega$ la esfera de centro \vec{p} y radio $\delta > 0$, contenida en Ω . Pruebe que

$$\iint_{\partial\Omega} (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot d\vec{S} = \iint_{\partial B(\vec{p}, \delta)} (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot d\vec{S}$$

Bonus.¹ Es posible mostrar que $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \iint_{\partial B(\vec{p}, \delta)} (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot d\vec{S} = -4\pi\phi(\vec{p})$ (no se pide que lo haga),

de donde se concluye que $\phi(\vec{p}) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot d\vec{S}$. Esto prueba que es posible reconstruir ϕ en Ω a partir del conocimiento de ϕ y su gradiente $\nabla\phi$ sobre el borde $\partial\Omega$.

¹El alumno que decida probar este límite durante el control, debe entregar su respuesta en una hoja separada. En ese caso optará a un *bonus* máximo de un punto (1.0 pts.) a sumarse a su pregunta con menor puntaje cuando corresponda, sin superar el 7.0 como nota final. Esto no es acumulable para futuros controles.