Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2002 – Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Clase Auxiliar N°5

P1. Sea $\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2+y^2>0\}$ y $\vec{J}:\ \Omega \to \mathbb{R}^3$ el campo vectorial expresado, en coordenadas cilíndricas, de la siguiente forma:

$$\vec{J}(\rho,\theta,z) = \left(2\theta + \sqrt{2+\rho^2}\right)\hat{\rho} + \frac{e^{\theta^2}}{\rho}\hat{\theta} + (\theta^2 + \ln(1+\ z^2))\hat{k}\ , \qquad \forall(\rho,\theta,z) \in \Omega.$$

(a) Verifique que el campo $\vec{J}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω, y luego calcule $rot(\vec{J})(\vec{r}),\ \forall \vec{r} \in \Omega$.

(b) Bosqueje la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ que está definida por las relaciones $x^2+y^2=1$, $0 \le z \le x,\ y \ge 0$.

(c) Calcule el trabajo que ejerce el campo $\vec{J}$ al recorrer la curva $\partial\Sigma$ en sentido anti – horario.

P2. Sean $a, h > 0$ constantes. Considere las superficies $S_1, S_2, S_3, S_4 \subset \mathbb{R}^3$ de la figura N°1 (ver esquema más abajo), en donde:

- S_1 es un círculo de radio a ubicado a una altura h.
- S_2 representa las tres cuartas partes del manto de un cilindro de radio a y altura h.
- S_3 es un triángulo equilátero cuyos catetos miden a y h.
- S_4 representa las tres cuartas partes de un círculo de radio a.

Suponga que el eje de simetría del cilindro es el propio eje OZ, que la superficie S_4 está contenida en el plano XY y que la superficie S_3 está contenida en el plano XZ.

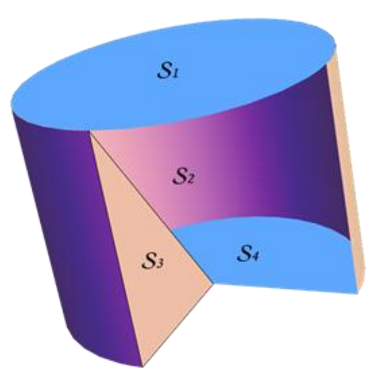

***Figura N°1**: esquema de las superficies S_1, S_2, S_3, S_4.*

Considere el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) := (y, z, 2x)$, definido $\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, y la superficie $S := S_1 \cup \ S_2 \cup S_3 \cup S_4$, orientada según la normal exterior.
Verifique que se satisfacen las hipótesis del Teorema del Rotor de Stokes, y luego utilice dicho teorema para calcular la siguiente integral de flujo:

$$\iint_S rot(\vec{F}) \cdot \overrightarrow{dA}$$

<u>**Indicación:**</u> antes de realizar cualquier cálculo, estudie minuciosamente el borde geométrico (frontera) de la superficie S.

P3. Verifique que el siguiente campo vectorial:

$$\vec{E}(x,y,z) := (y^2\cos(x) + \ z^3)\hat{\imath} + (2y\sin(x) - 4)\hat{\jmath} + (3xz^2 + 2z)\hat{k} \ \ , \forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

es un campo conservativo, y encuentre un potencial escalar asociado a él. Luego, calcule la integral de trabajo

$$\int_\Gamma \vec{E} \cdot \overrightarrow{dr},$$

en donde $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ es la curva que consta de dos partes:

- el arco de parábola $y = x^2$, $z = 0$, recorrido desde el origen hacia el punto $(1,1,0)$
- el segmento recto que va desde el punto $(1,1,0)$ hacia el punto $(0,0,1)$.