Pauta Clase Auxiliar N°1 (problema P4)

P4. (Solución)

(a) La descripción de un punto en coordenadas esféricas queda completamente definida si conocemos las variables (r, θ, φ) , en donde r representa la distancia del punto al origen, θ es el ángulo azimutal (equivalente al de las coordenadas cilíndricas, y que varía entre 0 y 2π) y φ es el ángulo cenital, que varía entre 0 y π . Si quieren estudiar esto en más detalle les recomiendo leer el capítulo N°1 del apunte.

Ahora, para la curva Ψ del enunciado nos dicen que $r = a$ (constante) y $\varphi = \theta/2$, con θ variando desde 0 a 2π . En consecuencia, podemos parametrizar esta curva en coordenadas esféricas por la función:

$$\vec{\sigma}(\theta) := a\hat{r} \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

en donde $\hat{r}$ representa el vector unitario radial de las coordenadas esféricas, dado por:

$$\hat{r} = (\sin(\varphi) \cos(\theta) , \sin(\varphi) \sin(\theta) , \cos(\varphi))$$

Entonces, se tendrá que:

$$\vec{\sigma}(\theta) = a \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta) , \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) , \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

El bosquejo lo haré en la próxima clase auxiliar (recuérdemelo).

(b) Al igual que en el problema N°1, como el campo vectorial $\vec{E}$ recorre la curva Ψ en sentido anti – horario, la integral debe calcularse desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$. Entonces, el trabajo pedido se calcula así:

$$W = \int_{\Psi} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\sigma} = \int_0^{2\pi} \vec{E}(\vec{\sigma}(\theta)) \cdot \frac{\overrightarrow{d\sigma}}{d\theta}(\theta) d\theta$$

Nótese que para todo $\theta \in [0, 2\pi]$ se tiene que:

$$\vec{E}(\vec{\sigma}(\theta)) = a \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

, y también:

$$\frac{\overrightarrow{d\sigma}}{d\theta}(\theta) = a \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \\ \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta) \\ -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

En consecuencia, se tiene que:

$$W = a^2 \int_0^{2\pi} \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(\theta)) d\theta = \pi a^2$$