Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2002 – Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Pauta Clase Auxiliar Nº1 (problema P1)

P1. (Solución)

(a) Llamemos $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ a la circunferencia que queremos parametrizar y llamemos $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ al plano que la contiene. Claramente, la ecuación cartesiana de dicho plano será $\Pi : x + y + z = 1$, y el vector normal **unitario** a dicho plano será $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Nótese también que el centro de la circunferencia $\mathcal{C}$ está en el punto $\frac{1}{3}(1,1,1)$, de modo tal que el radio de $\mathcal{C}$ será:

$$R = \left\|(1,0,0) - \frac{1}{3}(1,1,1)\right\| = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Como $\mathcal{C}$ es una circunferencia contenida en un plano, su parametrización debiese ser de la forma:

$$\vec{\sigma}(\theta) := R\cos(\theta)\,\hat{u} + R\sin(\theta)\,\hat{v} \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

en donde $\hat{u}, \hat{v} \in \Pi$ son dos vectores unitarios y ortogonales entre sí (ortonormales).
Trabajaremos en el plano $\Pi' : x + y + z = 0$, el cual es paralelo a Π (y por lo tanto posee la misma normal unitaria), y en el cual es muy fácil hallar dos vectores ortonormales entre sí (puesto que dicho plano es un sub-espacio vectorial de $\mathbb{R}^3$).
En efecto, tomando $\hat{u}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$ y $\hat{v}' = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$ (que claramente son ortonormales entre sí), obtenemos que la parametrización de la circunferencia $\mathcal{C}' \subset \Pi'$, que es la "copia" de la circunferencia $\mathcal{C}$ en el plano Π', viene dada por:

$$\vec{\sigma}'(\theta) := R\cos(\theta)\,\hat{u}' + R\sin(\theta)\,\hat{v}' \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Ahora, notemos que la distancia entre los planos Π y Π' es $1/\sqrt{3}$, dado que los puntos $(0,0,0)$ y $\frac{1}{3}(1,1,1)$ están ubicados sobre la misma recta y separados por una distancia $1/\sqrt{3}$.
En consecuencia, para movernos del plano Π' al plano Π debemos hacerlo según el vector $\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{n}$. Por lo tanto, la parametrización buscada será:

$$\vec{\sigma}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{n} + \vec{\sigma}'(\theta) \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

que corresponde justamente a la parametrización que les di en la clase.

(a) Antes que nada, intuitivamente podemos deducir que la curva Γ se trata de una circunferencia, pues se obtiene al intersectar un casquete esférico con un plano que pasa por el origen. Además, usando la notación de la parte (a), observamos que $\Gamma \subset \Pi'$, y en consecuencia, es válida la siguiente parametrización para esta circunferencia:

$$\vec{\xi}(\theta) := R\cos(\theta)\,\hat{u}' + R\sin(\theta)\,\hat{v}' \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

en donde $\hat{u}'$ y $\hat{v}'$ son los mismos de antes, pero el radio R de esta circunferencia es desconocido. Sin embargo, como Γ también está contenida en el casquete esférico unitario, su parametrización debe satisfacer la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Remplazando cada componente de $\vec{\xi}$ en dicha ecuación se obtiene la siguiente igualdad:

$$(\frac{R}{\sqrt{2}}\cos(\theta) + \frac{R}{\sqrt{6}}\sin(\theta))^2 + (-\frac{2R}{\sqrt{6}}\sin(\theta))^2 + (-\frac{R}{\sqrt{2}}\cos(\theta) + \frac{R}{\sqrt{6}}\sin(\theta))^2 = 1$$

de donde se deduce que $R = 1$. Entonces, se obtiene que:

$$\vec{\xi}(\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\theta) + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin(\theta)\ , -\frac{2}{\sqrt{6}}\sin(\theta)\ , -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\theta) + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin(\theta)\right)\ , \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Ahora sólo nos falta calcular la integral de trabajo. Como nos dicen que el campo vectorial $\vec{G}$ recorre la curva en sentido anti-horario, la integral debe calcularse desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$. Entonces, el trabajo pedido se calcula así:

$$W = \int_{\Gamma} \vec{G} \cdot \overrightarrow{d\xi} = \int_{0}^{2\pi} \vec{G}\left(\vec{\xi}(\theta)\right) \cdot \frac{\overrightarrow{d\xi}}{d\theta}(\theta)\, d\theta = \int_{0}^{2\pi} \frac{2}{\sqrt{6}}\sin(\theta)\,\hat{k} \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta) + \frac{1}{\sqrt{6}}\cos(\theta))\hat{k}\ d\theta$$

$$= \frac{2}{\sqrt{12}}\int_{0}^{2\pi} (\sin(\theta))^2\, d\theta + \frac{1}{3}\int_{0}^{2\pi} \sin(\theta)\cos(\theta)\, d\theta = \frac{2\pi}{2\sqrt{3}} + 0 = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$