Clase Auxiliar N°4

P1. Utilice el Teorema de Green en el plano para calcular el área encerrada por la hipocicloide de ecuación cartesiana $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$.

Indicación: haga un bosquejo de la curva. Verifique que la función $\vec{\sigma} : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$\vec{\sigma}(\theta) = \begin{pmatrix} 8(\cos(\theta))^3 \\ 8(\sin(\theta))^3 \end{pmatrix}, \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

es una parametrización regular de uno de los arcos de la hipocicloide. Utilice la simetría del problema para calcular el área pedida.

P2. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo vectorial definido, en coordenadas cartesianas, por:

$$\vec{F}(x, y, z) := \begin{pmatrix} 6xy^2z^3 + \cos(x^2) \\ xysin(xz) + 2x^2y \\ yzsin(xy) - 2x^2z \end{pmatrix}, \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Considere, además, las siguientes curvas en $\mathbb{R}^3$:

$$\Gamma_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 = 1, y = 0, z \geq 0\}$$

$$\Gamma_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0, y \geq 0\}$$

$$\Gamma := \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

Aplicando el Teorema de Green en forma apropiada, demuestre que el trabajo que realiza el campo $\vec{F}$ al recorrer la curva Γ en sentido anti-horario es igual a cero.

P3. Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ la curva obtenida al intersectar la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + z)$ con el plano de ecuación cartesiana $x + z = 2$. Considere el campo vectorial $\vec{G}(x, y, z) := (z, 2x, y)$, definido para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Verifique que se satisfacen las hipótesis del Teorema del Rotor de Stokes y después calcule el trabajo que efectúa dicho campo vectorial al recorrer la curva Γ en sentido anti – horario.

Compruebe su resultado calculando directamente el trabajo pedido, es decir, parametrizando la curva Γ y calculando la integral de trabajo correspondiente.