Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2002 – Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Clase Auxiliar Nº3

P1. Sea $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ en todo $\mathbb{R}^3$. También, sea $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ una región abierta y acotada, tal que su frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular y orientable.

(a) Suponga que existe $b>2$ tal que:

$$\|\vec{F}(\vec{r})\|\leq\frac{1}{1+\|\vec{r}\|^b}\quad,\forall\vec{r}\in\mathbb{R}^3.$$

Demuestre que:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} div(\vec{F})dV=0$$

(b) Sin considerar el enunciado de la parte (a), suponga ahora que:

$$\lim_{\|\vec{r}\|\to+\infty}\|\vec{F}(\vec{r})\|\,\|\vec{r}\|^2=0$$

Demuestre que:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}} div(\vec{F})dV=\iint_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot\hat{n}dA\quad,$$

en donde $\hat{n}$ representa la normal *interior* a la superficie $\partial\Omega$ y $\overline{\Omega}$ representa la adherencia de la región Ω.

P2. De acuerdo a la teoría de Hideki Yukawa (1907 – 1981) sobre las fuerzas existentes entre partículas sub-atómicas, la fuerza de atracción entre un neutrón y un protón tiene por potencial escalar a la siguiente función (expresada en coordenadas esféricas):

$$U(\vec{r}):=\frac{Ke^{-\alpha r}}{r}\quad,\forall\vec{r}\in\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\},$$

para ciertas constantes $\alpha>0$ y $K<0$.

(a) Encuentre el campo de fuerzas $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}^3$ asociado a dicho potencial escalar, esto es, tal que $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})\ , \forall \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

(b) Para $a > 0$, calcule directamente el flujo del campo $\vec{F}$ a través del casquete esférico $r = a$, cuando éste se orienta según la normal exterior.

(c) Pruebe que $\Delta U(\vec{r}) = \alpha^2 U(\vec{r})\ , \forall \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$. Para ello, use la identidad $\Delta U(\vec{r}) = div(\nabla U)(\vec{r})\ , \forall \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

(d) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ una región abierta y acotada que contiene al origen, y tal que su frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos y orientada según la normal exterior. Demuestre que:

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dA} = 4\pi K - \alpha^2 \iiint_{\Omega} U dV$$

¿Contradice este resultado el Teorema de la Divergencia de Gauss? Explique.

P3. Utilice el Teorema de Green en el plano para calcular el área encerrada por la hipocicloide de ecuación cartesiana $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$.

<u>Indicación:</u> haga un bosquejo de la curva. Verifique que la función $\vec{\sigma} : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$\vec{\sigma}(\theta) = \begin{pmatrix} 8(\cos(\theta))^3 \\ 8(\sin(\theta))^3 \end{pmatrix}\ , \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

es una parametrización regular de uno de los arcos de la hipocicloide. Utilice la simetría del problema para calcular el área pedida.