

Clase Auxiliar N°2

P1. Considere los campos vectoriales $\vec{F}, \vec{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definidos para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ por:

$$\vec{F}(x, y, z) := (2x + 2, 4y - 4, 3z)$$

$$\vec{G}(x, y, z) := (e^{(z+\cosh(y))} \sin(y) + 4x, e^{\arctan(x^2)} \sinh(z) + y, x^2 + y^2 - 4z)$$

(a) Sean $a, b, c > 0$ constantes. Considere el casquete elipsoidal $E \subset \mathbb{R}^3$ definido por la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Calcule el flujo del campo $\vec{F}$ a través de la superficie E , cuando ésta se orienta según la normal *interior*.

(b) Sean $R, H > 0$ constantes. Considere el paraboloide definido por la ecuación cartesiana $x^2 + y^2 - Rz = 0$, y sea $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ la parte del manto de dicho paraboloide que está comprendida entre los planos $z = 0$ y $z = H$, sin considerar la tapa superior. Calcule el flujo del campo $\vec{G}$ a través de la superficie $\mathcal{M}$, cuando ésta se orienta según la normal *exterior* al paraboloide.

P2. Sea $\mathcal{D} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 > 0\}$ y $\vec{F} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo vectorial expresado, en coordenadas cilíndricas, de la siguiente forma:

$$\vec{F}(\rho, \theta, z) := \frac{1}{\rho} \hat{\rho} + e^{-\theta^2} \hat{k} \quad , \quad \forall (\rho, \theta, z) \in \mathcal{D}$$

(a) Verifique que el campo $\vec{F}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en el dominio $\mathcal{D}$. Luego, usando la expresión del operador divergencia en coordenadas cilíndricas, demuestre que $\text{div}(\vec{F})(\vec{r}) = 0$, $\forall \vec{r} \in \mathcal{D}$.

(b) Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la porción del casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está contenida entre los planos $z = -1$ y $z = 1$, sin considerar las tapas superior e inferior. Haga un bosquejo de Σ y luego calcule el flujo del campo $\vec{F}$ a través de la superficie Σ , cuando ésta se orienta según la normal exterior *al manto de la esfera*.

Explique por qué no es posible aplicar directamente el Teorema de la Divergencia de Gauss en la resolución de este problema.