Clase Auxiliar N°1

P1. La idea principal de este problema es trabajar con circunferencias en $\mathbb{R}^3$ que no estén contenidas en planos paralelos al plano $z = 0$.

- (a) Parametrice, en $\mathbb{R}^3$, la circunferencia que pasa por los puntos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$.
- (b) Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ la curva obtenida al intersectar la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el plano de ecuación cartesiana $x + y + z = 0$. Considere el campo vectorial $\vec{G}(x, y, z) := -y\hat{k}$, definido $\forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calcule el trabajo que efectúa dicho campo vectorial al recorrer la curva Γ en sentido anti – horario.

Propuesto: Suponga que la densidad lineal de masa de Γ viene dada por la aplicación $\rho(x, y, z) := x^2$, $\forall(x, y, z) \in \Gamma$. Calcule la masa total de Γ .

P2. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie caracterizada por las relaciones $x^2 + y^2 - 2z = 0$, $x^2 + y^2 - 4y \leq 0$.

- (a) Encuentre una parametrización regular de S y obtenga un campo de normales a ella. Bosqueje la superficie S en un gráfico.
- (b) Calcule la masa total de S y determine las coordenadas de su centro de masa, asumiendo que la densidad superficial de masa de S viene dada por la función:

$$f(x, y, z) := \frac{1}{\sqrt{1 + 2z}}, \quad \forall(x, y, z) \in S$$

- (c) Considere el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) := \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\hat{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\hat{j} + \hat{k}$, definido para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus Eje\ OZ$. Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie S , cuando ésta se orienta según el campo de normales obtenido en la parte (a).

P3. Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ una curva simple y regular, y sea $\vec{r}_o : [0, L(\mathcal{C})] \rightarrow \mathbb{R}^3$ su parametrización en longitud de arco (siendo $L(\mathcal{C})$ el largo total de la curva $\mathcal{C}$). Considere la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por la función:

$$\begin{aligned} \vec{r} &: [0, L(\mathcal{C})] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, \theta) &\rightarrow \vec{r}(s, \theta) := \vec{r}_o(s) + a \cos(\theta) \hat{N}(s) + a \sin(\theta) \hat{B}(s) \end{aligned}$$

donde $\hat{N}(s)$ y $\hat{B}(s)$ representan, respectivamente, los vectores normal y binormal a la curva $\mathcal{C}$ en el punto $\vec{r}_o(s)$ y $a > 0$ es una constante tal que $a \leq 1/\kappa(s)$ para todo $s \in [0, L(\mathcal{C})]$, siendo $\kappa(s)$ la curvatura de $\mathcal{C}$ en el punto $\vec{r}_o(s)$.

- (a) Bosqueje la superficie Σ . ¿Qué significado geométrico tiene la condición $a \leq 1/\kappa(s)$ para todo $s \in [0, L(\mathcal{C})]$?
- (b) Calcule el vector normal a la superficie Σ , en cada punto de ella.
- (c) Demuestre que el área de Σ (denotada $A(\Sigma)$) viene dada por $A(\Sigma) = 2\pi a L(\mathcal{C})$.

P4. Una partícula se desplaza sobre la esfera de centro $(0,0,0)$ y de radio $a > 0$, describiendo una trayectoria helicoidal $\Psi \subset \mathbb{R}^3$ caracterizada por las ecuaciones $r = a$ y $\varphi = \theta/2$ (en coordenadas esféricas), con el ángulo azimutal θ variando desde 0 hasta 2π .

- (a) Parametrice la trayectoria Ψ y haga un bosquejo de ella.
- (b) Considere el campo vectorial $\vec{E}(x, y, z) := -y\hat{i} + x\hat{j}$, definido $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calcule el trabajo que ejerce el campo $\vec{E}$ al recorrer la curva Ψ cuando ésta se recorre en sentido anti – horario.