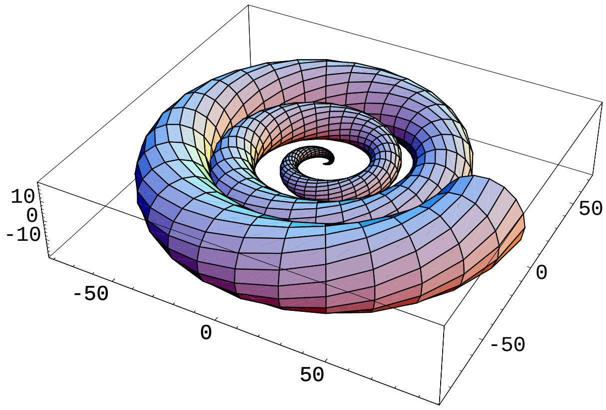



# Ejercicios de Funciones de Variable Compleja y Geometría Diferencial

**Martín Rivas**

**e-mail:martin.rivas@ehu.es**

**http://tp.lc.ehu.es/martin.htm**

Departamento de Física Teórica

UPV/EHU

Leioa, Febrero 2008

# Capítulo 1

# Operaciones con números complejos

Sea $z \in \mathbb{C}$, un número complejo arbitrario que lo escribimos de la forma $z = x+iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, de tal manera que $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$, son la **parte Real** y **parte Imaginaria** de $z$, respectivamente. Con los números complejos podemos hacer las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}
\textbf{Suma} \quad &: \quad z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \\
\textbf{Producto} \quad &: \quad z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2). \\
\textbf{Conjugación} \quad &: \quad z \to \bar{z}, \quad \bar{z} = x - iy, \\
\textbf{Valor absoluto} \quad &: \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |\bar{z}| = \sqrt{z\bar{z}} \geq 0, \\
\textbf{Distancia entre complejos} \quad &: \quad d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1| \geq 0.
\end{aligned}$$

Además, la suma y el producto son operaciones conmutativas y asociativas

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1,$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + z_2 + z_3, \quad z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3 = z_1 z_2 z_3,$$

y satisfacen entre ellas las operaciones de distributividad:

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

La conjugación 'respeta' a las dos operaciones suma y producto y al valor absoluto:

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{|z|} = |\bar{z}| = |z|.$$

Las potencias enteras del complejo $i$ son $i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ y las demás se reducen a éstas. Solamente existe un complejo $z = 0$, si y solo si $x = y = 0$, y los números reales son precisamente aquellos números complejos que son idénticos a sus complejos conjugados.

$$z = \bar{z}, \quad \Longleftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}.$$

El valor absoluto satisface $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ y las:

$$\textbf{desigualdades triangulares} \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||\,.$$

**Fórmula de Euler**

$$e^z \equiv e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

**Teorema de De Moivre**

Si el complejo $z$ se escribe como $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $z = re^{i\theta}$, el producto aparece como $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$, y las potencias $z^n = r^n e^{in\theta}$, entonces

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Como resulta que $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$, entonces $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$, de donde se pueden obtener todas las reglas trigonométricas de los ángulos múltiples y ángulos fraccionarios.

## Problemas

**1.1** Verificar las operaciones siguientes, tanto en su forma ordinaria como usando la forma polar de los números complejos que se indican:

$$\frac{5i}{2+i} = 1+2i, \quad (-1+i)^7 = -8(1+i).$$

$$i(1-i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i) = 2+2i\sqrt{3}, \quad (1+i\sqrt{3})^{-10} = 2^{-11}(-1+i\sqrt{3}),$$

**1.2** Describir geométricamente cada una de las regiones del plano complejo
a) $-\pi < \arg z < \pi, \quad |z| > 3$;
b) $1 < |z-2i| < 2$;
c) $|2z+3| > 5$;
d) $\mathrm{Im}(z^2) > 0$ y $\mathrm{Im}(z^2) \geq 0$;
e) $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \leq \frac{1}{2}$;
f) $|z-3| > |z|$.

**1.3** Indicar qué representan geométricamente las siguientes ecuaciones y desigualdades:

$\{a\}\ |z-1-i| = 1, \quad \{b\}\ |z-1| = |z+i|, \quad \{c\}\ |z-1+i| \geq |z-1-i|, \quad \{d\}\ |z+4i|+|z-4i| = 10.$

**1.4** Si $z = 6e^{i\pi/3}$, evaluar $|e^{iz}|$. [Sol. $e^{-3\sqrt{3}}$]

**1.5** Encontrar todas las soluciones de los sistemas de ecuaciones:

$$\text{a)} \quad \frac{|z-12|}{|z-8i|} = \frac{5}{3}, \quad \frac{|z-4|}{|z-8|} = 1,$$

y

$$\text{b)} \quad |z^2-2i| = 4, \quad \frac{|z+1+i|}{|z-1-i|} = 1.$$

[Sol. $z_1 = 6+17i, \quad z_2 = 6+8i$ y $z_1 = 1-i, \quad z_2 = -1+i$.]

**1.6** Encontrar todas las soluciones de cada una de las 8 ecuaciones:

$$z^2 = i; \quad z^2 = 3-4i; \quad z^3 = -1; \quad z^6 = 64;$$

$$z^7+1 = 0; \quad z^8 = 1+i; \quad \bar{z} = z^3; \quad |z|-z = 1+2i;$$

**1.7** Encontrar para qué valores de $z$ se satisface la ecuación

$$\cos(z-i) = 2.$$

Resolver asímismo la ecuación

$$\sqrt[3]{(z-1+i)(z-1)^2} = z.$$

[Sol.$z = 2k\pi + i(1-\ln(2\pm\sqrt{3})), k \in \mathbb{Z}$ y $z_1 = (1-i)/2$ y $z_2 = (3+i)/5$][Parcial Abril 2004]

**1.8** Demostrar las fórmulas siguientes:

$$\begin{aligned}(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^{2n} &= \left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{2n} e^{in\alpha},\\ \left(\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\right)^n &= \frac{1+i\tan n\alpha}{1-i\tan n\alpha},\end{aligned}$$

Sugerencia: Escribir esas relaciones en términos del ángulo mitad.

**1.9** Demostrar que no hay ningún valor de $z$ para el cual la función $e^z$ se anula. Asímismo, demostrar que

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z} \quad \text{y que} \quad e^{z+2\pi i} = e^z.$$

**1.10** Encontrar todas las soluciones de la ecuación

$$\tan z = \frac{5i}{3}.$$

[Sol. $z_k = i \ln 2 + \pi \left( \frac{1}{2} + k \right), k \in \mathbb{Z}$.] [Parcial Abril 2003]

**1.11** Demostrar que en el plano complejo, la ecuación de una circunferencia que pasa por tres puntos no alineados $z_1$, $z_2$ y $z_3$ se puede escribir en la forma del determinante

$$\begin{vmatrix} |z|^2 & z & \bar{z} & 1 \\ |z_1|^2 & z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ |z_2|^2 & z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ |z_3|^2 & z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

**1.12** Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2i$ y $z_3 = 1 + i$.

[Sol $(x+1)^2 + y^2 = 5$.]

**1.13** Demostrar que en el plano complejo, la ecuación de una circunferencia que pasa por tres puntos no alineados $z_1$, $z_2$ y $z_3$ se puede escribir en la forma:

$$\frac{\frac{z-z_1}{z-z_2}}{\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}} = \frac{\frac{\bar{z}-\bar{z}_1}{\bar{z}-\bar{z}_2}}{\frac{\bar{z}_3-\bar{z}_1}{\bar{z}_3-\bar{z}_2}}$$

**1.14** Demostrar que para todo número real positivo $k \neq 1$ la ecuación

$$\frac{|z-z_1|}{|z-z_2|} = k,$$

es la ecuación de una circunferencia. Encontrar el centro y el radio de la misma. ¿Cómo se puede definir entonces una circunferencia? Resolver el problema inverso, es decir, dados el centro y radio de una circunferencia, encontrar los puntos $z_1$ y $z_2$ y el valor de $k$ que lo satisface.

**1.15** Demostrar que la ecuación $|z - z_1| + |z - z_2| = a > 0$, donde $z_1$ y $z_2$ y $a > |z_1 - z_2|$, son dos números complejos arbitrarios, es precisamente la ecuación de una elipse en el plano que tiene sus focos en los puntos $z_1$ y $z_2$. ¿Qué puntos del plano representa la anterior ecuación si $a = 0$? ¿Y si $a < 0$?

**1.16** Probar que la forma usual de resolver las ecuaciones de segundo grado es aplicable a la ecuación $az^2 + bz + c = 0$, cuando $a$, $b$ y $c$ son números complejos.

**1.17** Demostrar que para todo polinomio de coeficientes reales de la variable compleja $z$, $P(z)$, se verifica la igualdad

$$P(\bar{z}) = \overline{P(z)}.$$

**1.18** Un número $z$ recibe el nombre de **número algebraico** si es la solución de una ecuación polinómica del tipo $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$, con $n$ finito y donde los $a_0, \ldots, a_n$ son enteros. Los números que no verifican esta condición se denominan **números trascendentes**. En particular $e$ y $\pi$ son números trascendentes, pero todavia no se ha demostrado que $e\pi$ ó $e+\pi$ lo sean o no. Probar que los números siguientes son números algebraicos.

$$\text{a)} \quad \sqrt{3} + \sqrt{2}; \qquad \text{b)} \quad \sqrt[3]{4} - 2i.$$

**1.19** En la proyección estereográfica de la esfera de diámetro unidad sobre el plano complejo, en la que el polo sur de la esfera se identifica con el 0, demostrar que si $(\xi, \eta, \zeta)$ son las coordenadas de un punto de la superficie de la esfera y $z = x + iy$ su imagen estereográfica, entonces están relacionados por

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2},$$

$$x = \frac{\xi\zeta}{\xi^2+\eta^2}, \quad y = \frac{\eta\zeta}{\xi^2+\eta^2}.$$

**1.20** Si $(\xi, \eta, \zeta)$ son las coordenadas de un punto $P(z)$ sobre la esfera de diámetro unidad, encontrar las coordenadas espaciales de las imágenes de los siguientes puntos

$$P(-z), \quad P(\bar{z}), \quad P\left(\frac{1}{z}\right).$$

[Sol. $(-\xi, -\eta, \zeta)$, $(\xi, -\eta, \zeta)$, $(\xi, -\eta, 1-\zeta)$.]

**1.21** Sean $z_1$, $z_2$ y $z_3$ tres puntos sobre una circunferencia con centro en el origen. Demostrar que el triángulo que posee dichos puntos como vértices es equilátero si y solo si $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

**1.22** Dados tres vértices consecutivos de un paralelogramo $z_1$, $z_2$ y $z_3$, encontrar el cuarto vértice.

**1.23** Demostrar que para todo $z$ se verifica la identidad:

$$|\sqrt{z^2-1} + z| + |\sqrt{z^2-1} - z| = |z-1| + |z+1|.$$

**1.24** Demostrar que si tenemos un triángulo equilátero de vértices $z_1$, $z_2$ y $z_3$, entonces se cumple:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1.$$

Asímismo

$$(z_3 - z_1)(z_2 - z_3) = (z_1 - z_2)^2, \quad (z_1 - z_2)(z_3 - z_1) = (z_2 - z_3)^2.$$

**1.25** Demostrar que cualesquiera que sean los complejos $z$ y $\zeta$ se verifican las identidades y desigualdades:

1. $|z+\zeta|^2 + |z-\zeta|^2 = 2|z|^2 + 2|\zeta|^2$.
2. $|z\bar{\zeta} + 1|^2 + |z-\zeta|^2 = (1+|z|^2)(1+|\zeta|^2)$.
3. $|z\bar{\zeta} - 1|^2 - |z-\zeta|^2 = (|z|^2-1)(|\zeta|^2-1)$.
4. $|z+\zeta| \leq |z| + |\zeta|$.
5. $|z-\zeta| \geq ||z| - |\zeta|| \geq |z| - |\zeta|$.
6. $|z+\zeta| \geq ||z| - |\zeta|| \geq |z| - |\zeta|$.
7. $|z-\zeta| \leq |z| + |\zeta|$.

**1.26** En cálculo vectorial se define el producto escalar (o producto interior) de dos vectores $\boldsymbol{u} \equiv (u_1, u_2, u_3)$ y $\boldsymbol{v} \equiv (v_1, v_2, v_3)$ mediante $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$. Se demuestra que $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = |u||v|\cos\theta$, siendo $\theta$ el ángulo que forman dichos vectores. Si los complejos los consideramos como vectores bidimensionales demostrar que su producto interior se escribe como:

$$z_1 \cdot z_2 = \mathrm{Re}(\bar{z}_1 z_2).$$

**1.27** En cálculo vectorial se define el producto vectorial (o producto exterior) de dos vectores $\boldsymbol{u} \equiv (u_1, u_2, u_3)$ y $\boldsymbol{v} \equiv (v_1, v_2, v_3)$ como otro vector $\boldsymbol{w} \equiv (w_1, w_2, w_3)$ mediante $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$, cuyas componentes son $w_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2$, $w_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3$, $w_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1$. Se demuestra que el módulo de este vector vale $|w| = |u||v|\sin\theta$ siendo $\theta$ el ángulo que forman dichos vectores. Si los complejos los consideramos como vectores bidimensionales su producto vectorial sería perpendicular al plano complejo y solamente tendría la tercera componente no nula. Demostrar que esta tercera componente asociada al producto vectorial se calcula mediante

$$z_1 \times z_2 = \mathrm{Im}(\bar{z}_1 z_2).$$

**1.28** En cálculo vectorial se demuestra que el área del paralelogramo subtendido por los dos vectores $\boldsymbol{u} \equiv (u_1, u_2, u_3)$ y $\boldsymbol{v} \equiv (v_1, v_2, v_3)$ vale Área= $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$. Encontrar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -1 - i$ y $z_3 = 3$.

**1.29** Demostrar que el área de un triángulo cuyos vértices son los puntos $z_1$, $z_2$ y $z_3$, es

$$\sum_{\pi} \frac{(z_2 - z_3)|z_1|^2}{4iz_1},$$

donde el sumatorio se extiende a todas las permutaciones $\pi$ cíclicas de 1, 2 y 3.

**1.30** Probar que el conjunto de números complejos $z = a + ib$ es equivalente al conjunto de matrices reales $2 \times 2$ de la forma:

$$z = a + ib \quad \rightarrow \quad Z = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Establecer la relación entre las operaciones suma y producto de matrices con las correspondientes operaciones con complejos. ¿Cómo se caracteriza entre las matrices la conjugación compleja? ¿Y el valor absoluto $|z|$. Analizar la forma general de un número complejo de valor absoluto 1.¿Tiene algo que ver con las rotaciones del plano?

**1.31** Analizar la convergencia de las sucesiones

$$\text{a)} \quad u_n = \frac{i^n}{n}, \qquad \text{b)} \quad u_n = \frac{(1+i)^n}{n}.$$

**1.32** Probar que

$$\text{a)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 i^n}{n^3+1} = 0; \qquad \text{b)} \quad \lim_{n\to\infty} \left( \frac{n}{n+3i} - \frac{in}{n+1} \right) = 1 - i.$$

**1.33** Probar que la serie

$$1 + i/3 + (i/3)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (i/3)^{n-1},$$

converge y hallar su límite.

**1.34** Encontrar para qué valores del parámetro real $a$ las siguientes series son convergentes:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a} e^{in}, \quad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a} e^{i\pi/n}, \quad \text{c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2+1\right)^{-a} \left(e^{i\pi/n} - 1\right),$$

$$\text{d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{n!} \, i^n.$$

**1.35** Calcular, usando la fórmula de De Moivre, las funciones trigonométricas de ángulos múltiples $\sin k\theta$ y $\cos k\theta$, con $k$ entero, en términos de las funciones $\sin\theta$ y $\cos\theta$ y sus potencias. ¿Y si $k$ es un número fraccionario de la forma $k = 1/n$, con $n$ entero? Particularizar para el caso $k = 5$ y $k = 1/2$.

**1.36** Encontrar las siguientes sumas en términos de funciones ordinarias y del parámetro $n$:

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx, \quad \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx,$$

$$\sin x + \sin 3x + \cdots + \sin(2n-1)x, \quad \cos x + \cos 3x + \cdots + \cos(2n-1)x,$$

$$\sin x - \sin 2x + \cdots + (-1)^{n-1} \sin nx.$$

(Se sugiere considerar sumas de progresiones geométricas de razón $e^{ix}$.)

**1.37** Resolver las siguientes preguntas:

1. Calcular las partes real e imaginaria de $(1-i)^{4i}$.

2. Calcular las partes real e imaginaria de las soluciones de $\sin z = 2$.

3. Determinar la imagen del rectángulo $R$ determinado por los intervalos de los ejes real e imaginario $R = [\log 2, \log 3] \times [-\pi, \pi]$, bajo la acción de la función exponencial $f(z) = e^z$.

[Examen Junio 2002]

**1.38** Resolver las siguientes preguntas:

1. Hallar todas las soluciones de la ecuación $(e^z + 1)^3 + 8 = 0$.
2. Calcular todos los valores posibles de $(\cos i)^i$.
3. Sea $t \in (-\pi, \pi)$. Calcular el argumento principal del complejo $e^{it} + 1$.

[Examen Septiembre 2002]

**1.39** Resolver las siguientes preguntas:
(a) Calcular todos los valores posibles de $(1 - i)^{1+i}$.
(b) Hallar todas las raíces de $\cos z = \cosh z$.
(c) Calcular la imagen de la región $Q = \{z : 4 \leq |z| \leq 9, -\pi/2 \leq \text{Arg}z \leq \pi/2\}$, bajo la acción de la rama principal de la función $f(z) = \sqrt{z}$ definida sobre el plano complejo con la línea de corte el semieje real $(-\infty, 0]$. [Examen Junio 2003]

**1.40** (a) Calcular y representar gráficamente en el plano complejo las soluciones de la ecuación

$$(z-1)^4 = \frac{16 + 16i}{\sqrt{2}} \quad .$$

(b) Calcular las partes real e imaginaria de todos los valores posibles de $(ai)^i$ si $a$ es un número real distinto de cero.
(c) Mostrar que

$$\left(\frac{1 + i\tan 2}{1 - i\tan 2}\right)^n = \frac{1 + i\tan(2n)}{1 - i\tan(2n)} \quad \text{si} \quad n = 1, 2, 3 \ \ldots$$

(d) Calcular la imagen de la región

$$\{ \ z \in \mathbb{C} \ : \ 8 \leq |z| \leq 27, \ -\frac{3\pi}{4} \leq \arg z \leq 0 \ \}$$

bajo la acción de la rama principal de $\sqrt[3]{z}$ en la que el corte se realiza a lo largo de $(-\infty, 0]$. [Examen Junio 2004]

**1.41** (a) Encontrar las raices de la ecuación

$$\sin(e^z) = \frac{1}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

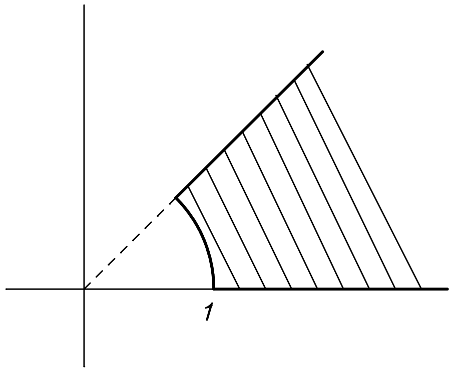
(b) Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 1$ y $a \in \mathbb{C}$. Demostrar que

$$\left|\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}\right| = 1.$$

(c) Calcular la imagen del rectángulo de vértices $A = -Mi$, $B = 7\pi/4 - Mi$, $C = 7\pi/4 + Mi$ y $D = Mi$, mediante la transformación dada por la función $e^{iz}$, siendo $M > 0$. [Examen Junio 2005]

**1.42** Encontrar todas las soluciones de las ecuaciones:
(a) $2z^4 + 1 - \sqrt{3}i = 0$.
(b) $\cosh z - \sinh z = 1$.
(c) $e^{(z-1)^2} = 1$.
(d) Sea $f(z)$ la rama de $\sqrt{z}$ que es analítica en el dominio $D = \mathbb{C} - \{z = -iy, \ y \geq 0\}$ y tal que $f(1) = -1$. Calcular $f(-1)$ y $f(2i)$.

[Examen Septiembre 2004]




**1.43** a) Calcular las partes real e imaginaria de $\sqrt{i^i}$.
(b) Demostrar que para toda función analítica

$$\frac{d}{dz}\left(\operatorname{Re} f(z)\right) = \frac{1}{2} f'(z).$$

(c) Si tenemos la región del plano complejo, $|z| \geq 1, \ 0 \leq \arg z \leq \pi/4$, de la figura, determinar cuáles son la imágenes de todos estos puntos bajo la función analítica $1/z^2$.

[Examen Parcial Abril 2006]

**1.44** (a) Encontrar todas las soluciones complejas de la siguiente ecuación y representarlas en el plano complejo

$$z^3 - i = -\sqrt{3}.$$

(b) Encontrar todos los números complejos que satisfacen la igualdad

$$z^{1+i} = 4$$

(c) Probar la siguiente igualdad

$$\cosh(z+w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

(d) Calcular

$$\oint_C \frac{dz}{z}.$$

cuando $C$ es la frontera del cuadrado $\{z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Re} z| \leq 1, |\operatorname{Im} z| \leq 1, \}$ y cuando $C$ es la circunferencia $|z+2| = 1$.

[Examen Junio 2006]

**1.45** (a) Encontrar las raices de la ecuación

$$\sin z + \cos z = 2.$$

(b) Encontrar todos los valores de

$$(-2)^{\sqrt{2}}.$$

(c) Calcular la imagen de la región $|z| \leq 4$, $-\pi/4 \leq \arg(z) \leq \pi/4$, bajo la transformación generada por la función $\sqrt{z}$ donde deberemos utilizar la rama $\sqrt{z} \equiv \sqrt{r} e^{i(\pi+\theta/2)}$.

[Examen Septiembre 2006]

**1.46** (a) Encontrar todas las soluciones de la ecuación

$$2z + 3i\bar{z} = 1/\bar{z}$$

(b) Calcular todas las partes real e imaginaria de

$$\sqrt{i^{-i}}$$

(c) Determinar las imágenes de los puntos de la región $1 \leq |z| \leq 2$, $\pi/2 \leq \text{Arg}z \leq 3\pi/4$, bajo la aplicación $w = 1/z^2$. Dibujar el resultado. ¿Cuál es la relación entre las áreas de la figura inicial y de la final?
(d) Demostrar que no existe ningún $z \in \mathbb{C}$ finito para el que $\cosh z = \sinh z$.¿Podemos decir lo mismo para un $z \in \mathbb{C}$ finito tal que $\cosh^2 z = \sinh^2 z$?
(e) ¿Es posible la existencia de una función analítica tal que su parte real $u$ y su parte imaginaria $v$, sean iguales? ¿Y la posibilidad $u = -v$?[Examen Junio 2007]

**1.47** (a) Calcular todos los valores de $z \in \mathbb{C}$ que verifican

$$\cos \bar{z} = \cos z.$$

(b) Sea $f(z)$ la rama de $\sqrt[4]{z}$ definida en $\mathbb{C} - [0, \infty)$ tal que $f(-1) = (1 - i)/\sqrt{2}$. Calcular $f(i)$.
(c) Encontrar el valor de $\pi^{\frac{i}{2\pi}}$, cuyo módulo es $e$.
(d) Representar gráficamente la imagen del conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, \text{Im}\, z \geq 0\}$, mediante la aplicación $T(z) = (z - i)/(z + i)$.[Examen Septiembre 2007]

**1.48** (a) Encontrar todas las soluciones de la ecuación

$$z^4 + 8 + 8\sqrt{3}i = 0.$$

Si unimos los puntos, solución de la ecuación anterior, ¿qué figura se obtiene? ¿Cuánto vale su área? ¿Cuál es el radio del círculo inscrito en la anterior figura?
(b) Calcular

$$(1 + \sqrt{3}i)^{\cos \pi}$$

[Parcial Abril 2007]

# Capítulo 2

# Funciones analíticas

**Función continua** Una función compleja de variable compleja $f(z)$ es continua en el punto $z_0$ si se cumple

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

y es independiente de la forma en que $z$ tiende a $z_0$. La función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es continua en $z_0 = x_0 + iy_0$ si y solo si las funciones $u$ y $v$ son continuas en $(x_0, y_0)$.
**Función derivable** Una función compleja de variable compleja $f(z)$ es derivable en el punto $z_0$, si existe el

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

y es independiente de la forma en que $z$ tiende a $z_0$. Al valor del anterior límite, si existe y es único, lo representamos por la expresión $f'(z_0)$ y lo denominamos la derivada de $f$ en $z_0$.
**Función analítica** Una función $f(z)$ es analítica en un punto $z_0$ si su derivada $f'(z)$ existe no solo en $z_0$ sino en cada punto $z$ de un cierto entorno de $z_0$.
**Condiciones de Cauchy-Riemann**
Una condición necesaria para que la función $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea analítica en una región $\mathcal{R}$ es que en los puntos de esa región se satisfagan las ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.1}$$

Si las anteriores derivadas parciales son funciones continuas en $\mathcal{R}$, entonces las condiciones anteriores son también suficientes para que $w$ sea analítica en $\mathcal{R}$.

La derivada de una función analítica, expresada como $f = u + iv$, se puede calcular de las dos formas

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}.$$

Como función de $z$, $f'(z)$ se calcula mediante las reglas habituales de derivación con respecto a $z$.
**Funciones elementales:** El lector deberá determinar la región donde son analíticas las siguientes funciones.
**Polinomios**:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n.$$

Funciones **racionales**:

$$w = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios.
Función **exponencial**

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Si $a$ es real y positivo se define

$$a^z = e^{z \ln a},$$

donde $\ln a$ es el logaritmo 'natural' de $a$.

Funciones **trigonométricas**:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

y las derivadas de ellas como $\sec z$, $\csc z$, $\tan z$, $\cot z$.
Funciones **hiperbólicas**:

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2},$$

y las derivadas de ellas como $\tanh z$, $\coth z$, etc.
Funciones **logarítmicas**: Si $z = e^w$, entonces escribimos $w = \ln z$ se dice que $w$ es el logaritmo natural de $z$ y resulta ser una función no uniforme, infinitamente multivaluada y definida mediante:

$$w = \ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad \text{siendo} \quad z = re^{i(\theta+2k\pi)}.$$

Funciones **trigonométricas inversas**:

$$\arcsin z = \frac{1}{i} \ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right), \quad \arccos z = \frac{1}{i} \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right),$$

y otras como $\arctan z$, etc. A veces se representan como $\sin^{-1} z$, $\cos^{-1} z$, etc., pero esta notación se puede prestar a errores. Son funciones multiformes debido al ln y a la raiz cuadrada.
Funciones **hiperbólicas inversas**:

$$\operatorname{arcsinh} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right), \quad \operatorname{arccosh} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right),$$

y las derivadas de ellas como $\operatorname{arctanh} z$, etc. Son también multiformes.
La función **potencial**

$$z^\alpha \equiv e^{\alpha \ln z},$$

para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, y si $f(z)$ y $g(z)$ son dos funciones complejas de $z$,

$$f(z)^{g(z)} \equiv e^{g(z) \ln f(z)},$$

y en general son funciones multiformes o multivaluadas por su definición a través del logaritmo.
Funciones **algebraicas**: Son soluciones $w$ de ecuaciones de la forma:

$$P_0(z)w^n + P_1(z)w^{n-1} + \cdots + P_{n-1}(z)w + P_n(z) = 0,$$

donde $P_0(z) \neq 0$, $P_1(z)$, $\ldots P_n(z)$ son polinomios en $z$.
Funciones **transcendentes** (o transcendentales): Son aquellas que no sea posible expresarlas como una función algebraica.
Funciones **elementales**: Aquellas funciones que se puedan expresar en términos de las anteriores (salvo las transcendentes) tras un número finito de operaciones del tipo sumas, restas, productos, cocientes y raices.
Función **entera**: Es aquella que es analítica en todo el plano complejo, excluido el punto del infinito.
Función **armónica**: Una función $f(x, y)$, definida en una región $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^2$, se dice que es **armónica** en $\mathcal{R}$ si satisface la ecuación de Laplace para todos los puntos de $\mathcal{R}$:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0.$$

Las partes real e imaginaria $u(x, y)$ y $v(x, y)$ de una función analítica son funciones armónicas. Se dice en ese caso que $u$ y $v$ son funciones **armónicas conjugadas** pues por satisfacer las condiciones (2.1), se tiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \quad \text{y sumando} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

## Problemas

**2.1** Encontrar la región del plano complejo en la que la función $|z|^2$ es continua. Calcular la derivada de la función $|z|^2$ en los puntos en que es continua. ¿Es una función analítica?

**2.2** Determinar la derivada de $\sin z$ y de $e^{2z}$ en un punto cualquiera $z \in \mathbb{C}$.

**2.3** Demostar que la función $f(z) = \sqrt{|xy|}$ satisface las condiciones de Cauchy-Riemann en $z = 0$, pero no es derivable en ese punto.

**2.4** Decir si las siguientes funciones definidas sobre los dominios que se indican, son biunívocas:
a) $w = z^2, \quad \operatorname{Re} z > 0;$
b) $w = \bar{z}^2, \quad |z| < 1;$
c) $w = \dfrac{1}{z-1}, \quad |z| < 1;$
d) $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right), \quad |z| < 2;$
e) $w = \dfrac{1}{4}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)^2, \quad |z| < 1, \quad 0 < \arg z < \pi/2.$

**2.5** Demostrar que si $f(z)$ es una función analítica de $z$, entonces

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2.$$

Verificar este resultado con la función $f(z) = z^2$.

**2.6** Determinar:

$$\text{a)} \lim_{z\to i} \frac{z^{10}+1}{z^6+1}, \quad \text{b)} \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2}, \quad \text{c)} \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{\sin z^2}, \quad \text{d)} \lim_{z\to 0} (\cos z)^{1/z^2}.$$

[Sol. a) $5/3$, b) $1/2$, c) $1/2$, d) $e^{-1/2}$.]

**2.7** Demostrar por qué las siguientes funciones no son analíticas en ningún punto del plano complejo:

$$f_1(z) = xy + iy; \quad f_2(z) = e^y(\cos x + i \sin x).$$

**2.8** Demostrar que las funciones siguientes definidas sobre $\mathbb{R}^2$, satisfacen la ecuación de Laplace y por lo tanto pueden ser interpretadas como la parte real de una función analítica. En este caso determinar la correspondiente función $f(z)$ de la cual son su parte real.
a) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1,$
b) $u(x, y) = \sin x \cosh y + 2 \cos x \sinh y + x^2 - y^2 + 4xy.$
[Sol. a) $w = z^3 + 3z^2 + C$, b) $w = \sin z + z^2 - i(2 \sin z + 2z^2)$.]

**2.9** **a)** Encontrar todas las funciones analíticas de la forma $f(z) = u(x) + iv(y)$.
**b)** Probar que si $f(z)$ es analítica en $\mathbb{C}$, entonces también lo es la función $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$. ¿Qué se puede decir de $h(z) = f(\bar{z})$?
**c)** Si $v$ es armónica conjugada de $u$, demostrar que $uv$ y $e^u \cos v$ son también funciones armónicas.
[Sol.a) $f(z) = (ax + b) + i(ay + c)$, con $a, b, c$ const.]

**2.10** Descomponer la función $\sin z$ en sus partes real e imaginaria.
[Sol. $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$]

**2.11** Demostrar que las siguientes funciones $u(x, y)$ son armónicas en cualquier dominio del plano y encontrar su armónica conjugada $v(x, y)$, así como la función analítica $f(z)$ de la que son su parte real, en los ejemplos:

1. $u = 2x(1 - y)$.

2. $u = 2x - x^3 + 3xy^2$.

3. $u = \sinh x \sin y$.
4. $u = y/(x^2+y^2)$.
5. $u = \cos x \sin y$.

[Sol: $f_1(z) = iz^2 + 2z + C$; $f_2 = 2z - z^3 + C$; $f_3 = -i\cosh z$; $f_4 = i/z + C$. $f_5$ no es armónica.]

**2.12** Halle la función analítica $w = f(z)$ a partir de su parte real $u(x,y) = 2e^x \cos y$ con la condición $f(0) = 2$.

[Sol. $2e^z$.]

**2.13** Sean $u$ y $v$ (o bien $u_i$ y $v_i$) pares de funciones armónicas conjugadas en un dominio $D$. Demostrar que los pares de funciones $U$ y $V$ que se indican, son asímismo funciones armónicas conjugadas en el dominio $D$.

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} & U = au - bv, \quad V = bu + av, \quad \forall a,b \in \mathbb{C}. \\
\text{b)} & U = au_1 + bu_2, \quad V = av_1 + bv_2, \quad \forall a,b \in \mathbb{C}. \\
\text{c)} & U = u_1u_2 - v_1v_2, \quad V = u_1v_2 + v_1u_2. \\
\text{d)} & U = e^u \cos v, \quad V = e^u \sin v. \\
\text{e)} & U = e^{u^2-v^2} \cos 2uv, \quad V = e^{u^2-v^2} \sin 2uv. \\
\text{f)} & U = e^{uv} \cos \dfrac{u^2-v^2}{2}, \quad V = e^{uv} \sin \dfrac{v^2-u^2}{2}.
\end{array}$$

**2.14** Encontrar (si es que existen) funciones armónicas de la forma siguiente:

$$\text{a) } u = \phi(ax+by), \forall a,b \in \mathbb{R}, \quad \text{b) } u = \phi(x + \sqrt{x^2+y^2}), \quad \text{c) } u = \phi(x^2+y).$$

**2.15** Encontrar (si es que existen) funciones armónicas de la forma siguiente:

$$\text{a) } u = \phi(x^2+y^2), \quad \text{b) } u = \phi(x^2-y^2), \quad \text{c) } u = \phi(y/x), \quad \text{d) } u = \phi\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right).$$

[Sol. a) $C\ln(x^2+y^2)+K$; (b) $C(x^2-y^2)+K$; (c) $C\arctan(y/x)+K$; (d) $Cx/(x^2+y^2)+K$ ]

**2.16** Si en un cierto dominio la funcion compleja $w = u + iv$ y su compleja conjugada $u - iv$ son ambas analíticas, probar que $w$ es una función constante en ese dominio.

**2.17** Si $w$ es una función analítica en un cierto dominio, probar que su valor absoluto $|w|$ no puede ser constante a menos que $w$ sea una función constante en el dominio.

**2.18** Mostrar que $f(z) = z/(1+|z|)$ es continua y transforma el plano complejo $\mathbb{C}$ en el disco $|w| < 1$. ¿Es analítica?

**2.19** Determinar los puntos singulares de las siguientes funciones y razonar por qué esas funciones son analíticas en todos los puntos del plano complejo excepto en los puntos singulares:

1. $\dfrac{2z+1}{z(z^2+1)}$.
2. $\dfrac{z^3+i}{z^2-3z+2}$.
3. $(z+2)^{-1}(z^2+2z+2)^{-1}$.

**2.20** Comprobar que la función

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\bar{z}^2}{z} & \text{si} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad z = 0, \end{cases}$$

satisface las condiciones de Cauchy-Riemann en el punto $z = 0$, pero no es analítica en dicho punto. ¿Es derivable en $z = 0$?

**2.21** Dada la función $f(z) = x^3 - i(y-1)^3 \equiv u + iv$, como resulta que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2,$$

¿Por qué la función $3x^2$ solamente representa a la derivada $f'(z)$ en el punto $z_0 = i$?

**2.22** Dadas las funciones $f(z)$ siguientes, demostrar que $f'(z)$ no existe en ningún punto:
a) $2x + xy^2 i$;
b) $z - \bar{z}$;
c) $e^x(\cos y - i \sin y)$.

**2.23** Encontrar los puntos del plano complejo donde las funciones $\sin z$, $\sinh z$ y $\tan z$ se anulan y aquellos en los que toman valores imaginarios puros.

**2.24** Demostrar que cada una de las siguientes funciones es una función entera:

$$f_1(z) = 3x + y + i(3y - x); \quad f_2(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y;$$

$$f_3(z) = e^{-y}(\cos x + i \sin x); \quad f_4(z) = (z^2 - 2)e^{-x}(\cos y - i \sin y).$$

[Sol.$f_1 = (3-i)z$; $f_2 = \sin z$; $f_3 = e^{iz}$; $f_4 = (z^2-2)e^{-z}$.]

**2.25** Sea $f(z)$ una función derivable en el punto $z_0$ y sean $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$. Demostrar que las fórmulas siguientes son equivalentes:

1. $f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0)$.
2. $f'(z_0) = v'_y(x_0, y_0) - iu'_y(x_0, y_0)$.
3. $f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) - iu'_y(x_0, y_0)$.
4. $f'(z_0) = v'_y(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0)$.
5. $|f'(z_0)|^2 = {u'_x}^2 + {u'_y}^2 = {u'_x}^2 + {v'_x}^2 = {u'_y}^2 + {v'_y}^2 = {v'_x}^2 + {v'_y}^2$.

**2.26** Sea $u(x,y)$ una función armónica. Demostrar que las funciones $\partial u/\partial x$ y $\partial u/\partial y$ son asímismo funciones armónicas. Si tenemos dadas dos funciones armónicas $u(x,y)$ y $v(x,y)$, que además son armónicas conjugadas, ¿resultan ser armónicas conjugadas las dos funciones $\partial u/\partial x$ y $\partial v/\partial x$? ¿Y las dos funciones $\partial u/\partial y$ y $\partial v/\partial y$?

**2.27** Sean $u$ y $v$ funciones armónicas conjugadas. Sus curvas de nivel son las familias de curvas sobre $\mathbb{R}^2$ definidas por $u(x,y) = C_1$ y $v(x,y) = C_2$. Probar que estas familias de curvas son ortogonales. Demostrar que en cada punto $(x_0, y_0)$ que sea común a una curva $u = C_1$ y a $v = C_2$, las tangentes(o normales) a las dos curvas son perpendiculares, siempre y cuando $\partial u/\partial x$ y $\partial v/\partial y$ no sean ambas nulas en el punto.

**2.28** Sea $u(x,y) + iv(x,y)$ una función compleja de variable compleja. Si donde aparecen $x$ e $y$ lo sustituimos por $x \to (z+\bar{z})/2$, $y \to (z-\bar{z})/2i$, entonces $g(z,\bar{z}) = u(x(z,\bar{z}), y(z,\bar{z})) + iv(x(z,\bar{z}), y(z,\bar{z}))$. Demostrar que la función $g$ así construida no puede ser función explícita de $\bar{z}$ si $u + iv$ es una función analítica.

**2.29** Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es una función analítica, y conocemos su parte real $u$ y su parte imaginaria $v$, demostrar que la $f(z)$ se puede construir mediante las dos posibilidades

$$f(z) = u(z,0) + iv(z,0), \quad f(z) = u(0,-iz) + iv(0,-iz).$$

**2.30** Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es una función analítica, dada $u$ (o $v$) la función $v$ (o $u$) está definida salvo una constante. Por lo tanto, el conocimiento de $u$ (o $v$) define a $f$ salvo una constante. Demostrar (utilizando las condiciones de Cauchy-Riemann) que:
a) $f(z) = 2u(z/2, -iz/2)$+constante,
b) $f(z) = 2iv(z/2, -iz/2)$+constante,
y donde la constante a determinar, mediante identificación por ejemplo, puede ser nula. De esta manera, toda función analítica queda definida, salvo una constante arbitraria, por el conocimiento de su parte real o imaginaria.

**2.31** Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es una función analítica, conocidas $u$ y $v$, $f(z)$ se puede calcular mediante la sustitución

$$f(z) = u(z/2, -iz/2) + iv(z/2, -iz/2).$$

**2.32** De los resultados de los dos problemas anteriores, demostrar que si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es una función analítica, entonces se cumple

$$u(z/2, -iz/2) = iv(z/2, -iz/2).$$

**2.33** Usando el resultado del problema **2.29**, encontrar $f(z)$ para los casos:

a) $u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$, b) $v(x, y) = \sinh x \cos y$, c) $v(x, y) = x^3 - 2y^2$, d) $u(x, y) = y/(x^2 + y^2)$.

**2.34** Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es una función analítica, demostrar que $f$ se obtiene conocidas $u$ y $v$ en la forma $f(z) = u(az, -i(1-a)z) + iv(az, -i(1-a)z)$, cualesquiera que sea el número complejo $a$. En particular, en varios problemas anteriores hemos tomado $a = 0$, $a = 1$ y $a = 1/2$, pero no es necesario que $a$ sea real.

**2.35** Sea la función $f(z) = z^{1/2}$.¿Es multivaluada? En caso afirmativo, determinar sus puntos de ramificación y los cortes, clarificando cómo es la superficie de Riemann sobre la que resulta ser una función uniforme. Demuestre que con $z = re^{i\theta}$ para $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, la función $f'(z)$ existe en todo el plano complejo salvo en el origen y en el semieje real positivo y que en ese caso $f'(z) = 1/(2f(z))$.

**2.36** Sea la función $w = \sqrt{z^2 + 1}$. ¿Es multivaluada? En caso afirmativo, determinar sus puntos de ramificación y los cortes, clarificando cómo es la superficie de Riemann sobre la que resulta ser una función uniforme. ¿Y para la función $w = \sqrt{z^2 - 1}$?

**2.37** Escribiendo $f = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ donde $z = re^{i\theta}$, obtener las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Usando la forma polar de las ecuaciones de Cauchy-Riemann estudie la derivabilidad compleja de $f = z^{27}$, $f = |z|z^2$ y $f = r^2 + \theta + 2ir^2\theta$.

**2.38** Use el valor principal de $z^i$ para escribir las funciones armónicas conjugadas $u(r, \theta)$ y $v(r, \theta)$, siendo $z^i = u + iv$.

**2.39** Halle el valor del módulo de la función $w = \sin z$ en el punto $z = \pi + i \log(2 + 5^{1/2})$.

**2.40** Si $f(z) = \sqrt{z}$ es la rama analítica de la raiz cuadrada en $\mathbb{C}$ excluido el semieje real positivo $[0, +\infty)$ con $\sqrt{-1} = -i$, comprobar que $f'(z) = 1/2\sqrt{z}$.

**2.41** Las órbitas de los planetas alrededor del sol, aunque son elípticas, son de pequeña excentricidad y en muchos casos se pueden asimilar a circunferencias. Si consideramos las órbitas circulares de la Tierra, Marte y Júpiter, de radios $R_T = 2$, $R_M = 3$ y $R_J = 10$, respectivamente y de acuerdo con la tercera Ley de Kepler de periodos aproximadamente iguales a $T_T = 1$, $T_M = 2$ y $T_J = 12$, se pide:
1. Escribir en el plano complejo las trayectorias de los tres planetas alrededor del sol.
2. Escribir las trayectorias de los planetas respecto de la Tierra y dibujar las mismas en el plano.
3. Decir si la aproximación de Ptolomeo mediante epicilos y deferentes era una aproximación razonable.

**2.42** Dada la función de dos variables $v(x, y) = x^3 - 3axy^2$, se pide:
(1) ¿Para qué valores del parámetro $a$ la función anterior es armónica?
(2) Encontrar la función $u(x, y)$ armónica conjugada de la anterior función armónica $v(x, y)$.
(3) ¿Cuál es la función analítica $f(z) = u + iv$ de la cual son, respectivamente, su parte real e imaginaria?
(4) Encontrar los vectores tangentes a las curvas $u =$ cte. y $v =$ cte. ¿En qué región son estos vectores ortogonales?¿En qué región estos vectores están definidos?
(5) Sea $f(z) = u + iv$. Como $u$ y $v$ son armónicas, también lo es $u + v$. Encontrar en términos de $f(z)$ la función $g(z)$ cuya parte real sea $u + v$.[Examen Junio 2002]

**2.43** Sea $u(x,y) = xy + (e^y + e^{-y})\cos x$.
(a) Mostrar que $u$ es armónica.
(b) Hallar todas las armónicas conjugadas de $u$ y una función analítica $f(z)$ expresada en términos de $z$ y tal que $\operatorname{Re} f(z) = u(x,y)$ , $f(0) = 2 + i$. [Examen Junio 2004]

**2.44** Resolver las siguientes preguntas:

1. Encontrar todos los polinomios armónicos de la forma

$$u(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \quad .$$

2. Calcular una función $v(x,y)$ para la que $u(x,y) + iv(x,y)$ sea entera.

[Examen Septiembre 2002]

**2.45** Dada la función

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2},$$

se pide:
(a) Demostrar que $u$ es armónica.
(b) Encontrar la armónica conjugada $v$ de la función armónica $u$.
(c) Determinar la función analítica $f(z)$ tal que $f(z) = u + iv$.

[Examen Junio 2003]

**2.46** Encontrar todas las funciones armónicas de dos variables $x$ e $y$ de la forma $\phi(xy)$. Encontrar la función analítica $f(z)$ que tiene como su parte imaginaria a las funciones anteriormente halladas.

[Examen Septiembre 2003]

**2.47** Encontrar el desarrollo en serie alrededor del punto $z_0 = 0$ de la función $f(z)$ que satisface las condiciones $f(0) = 0$, $f'(0) = i$ y la ecuación diferencial $f''(z) + i^2 f(z) = 0$. ¿De qué función se trata? [Examen Septiembre 2004]

**2.48** Sea la función

$$u(x,y) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$$

(a) Verificar que satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$ en $\mathbb{R}^2$.
(b) Como parte real de una función analítica, buscar todas sus armónicas conjugadas.
(c) Expresar en términos de $z$ la función $f(z) = u + iv$, tal que $f(0) = 1$.

[Examen Septiembre 2004]

**2.49** Sea $f = u + iv$ una función analítica en un entorno del origen, donde $u(x,y) = x - e^{-y}\sin x$. Determinar de qué función $f(z)$ se trata si debe cumplir además la condición

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z^m} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Discutir, y determinar para cada posible valor del número natural $m$, el valor del correspondiente límite $\alpha$. [Examen Junio 2005]

**2.50** Encuentra la función $f(z) \equiv f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$, analítica, que cumple las condiciones:

$$f(0) + f'(0) = i, \quad u + 2v = 2x(1 - y + x) - 2y(y-2).$$

**2.51** Sea $f(x+iy) = \cos x(\cosh y + a\sinh y) + i\sin x(\cosh y + b\sinh y)$. Encuentra para qué valores de los parámetros $a$ y $b$ la función $f(z)$ es analítica. Escribe $f$ en términos de $z$.
[Examen Septiembre 2006]

**2.52** Hallar todas las funciones enteras $f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ se verifica que

$$f(z) \equiv f(x + iy) = f(x) - f(y) + 2xyi$$

[Examen Junio 2007]

**2.53** Encontrar todos los posibles valores de $a, b, c \in \mathbb{C}$ de forma que la función

$$f(z) = az^2 + bz\bar{z} + c\bar{z}^2,$$

sea una función entera. [Examen Septiembre 2007]

# Capítulo 3

# Integración en el plano complejo

La integral de una función compleja de variable compleja entre dos puntos $z_1$ y $z_2$ a lo largo de un camino $\mathcal{C}$ que los une, y que puede ser abierto o cerrado en el caso de que $z_2 = z_1$, viene dada por

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} (u(x,y) + iv(x,y))(dx + idy) = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} (udx - vdy) + i \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} (vdx + udy)$$

y se reduce al cálculo de las dos integrales curvilíneas reales, a lo largo de la curva continua $\mathcal{C}$. Si la curva $\mathcal{C}$ viene escrita en forma paramétrica $\{x(t), y(t)\}$, $t \in [t_1, t_2]$, entonces

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} \{u(x(t), y(t))\dot{x}(t) - v(x(t), y(t))\dot{y}(t)\}\, dt + i \int_{t_1}^{t_2} \{v(x(t), y(t))\dot{x}(t) + u(x(t), y(t))\dot{y}(t)\}\, dt.$$

Si la curva $\mathcal{C}$ viene escrita en forma cartesiana $y = y(x)$, entonces

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \int_{x_1}^{x_2} \{u(x, y(x)) - v(x, y(x))y'(x)\}\, dx + i \int_{x_1}^{x_2} \{v(x, y(x)) + u(x, y(x))y'(x)\}\, dx.$$

**Teorema de Cauchy-Goursat**
Sea $f(z)$ una función analítica en una región $\mathcal{R}$ y en su contorno $C$. Entonces

$$\oint_C f(z)dz = 0. \tag{3.1}$$

**Teorema de Morera**
Sea $f(z)$ una función continua en una región simplemente conexa $\mathcal{R}$ y supongamos que se cumple

$$\oint_C f(z)dz = 0,$$

para toda curva cerrada simple en $\mathcal{R}$. Entonces $f(z)$ es analítica en $\mathcal{R}$.

Si $f(z)$ es analítica en una región simplemente conexa $\mathcal{R}$, entonces

$$\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a), \quad \text{siendo} \quad F'(z) = f(z)$$

es decir $F(z)$ es una primitiva de $f(z)$ (o bien $f(z)dz = dF$ es una diferencial exacta) y la integral entre $a$ y $b$ es independiente del camino que une dichos puntos.

Si la región $\mathcal{R}$ es múltiplemente conexa, siendo $C_0$ el contorno exterior y $C_i$, $i = 1, \ldots, n$ los contornos de las partes interiores, entonces el teorema de Cauchy-Goursat (3.1) se escribe

$$\oint_C f(z)dz = 0 = \oint_{C_0} f(z)dz + \oint_{C_1} f(z)dz + \cdots + \oint_{C_n} f(z)dz,$$

donde todos los contornos $C_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$ están recorridos de tal manera que al avanzar por ellos dejemos siempre el interior de la región a la izquierda.

**Teorema de Green en el plano (Teorema de Stokes)**
Si $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ y sus derivadas parciales son continuas en una región $\mathcal{R}$ del plano y en su contorno $C$, entonces

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\int_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

**Fórmula integral de Cauchy**
Si $f(z)$ es una función analítica en una región simplemente conexa $\mathcal{R}$ y en su contorno $C$ entonces, para todo punto $a$ del interior de $\mathcal{R}$, se tiene

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Como $f(z)$ es analítica en $a$ existe su derivada en ese punto que se obtiene de esta fórmula integral mediante derivación con respecto a la variable $a$

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz.$$

Además, si $f(z)$ es analítica en $a$, entonces sus derivadas de cualquier orden $f'(a)$, $f''(a), \ldots,$ son también analíticas en $a$.

**Teorema del Módulo máximo**
Si $f(z)$ es una función analítica sobre y en el interior de una curva cerrada $C$ y no es una función constante, entonces el valor máximo de $|f(z)|$ tiene lugar sobre la curva $C$.

**Teorema de Liouville**
Si $f(z)$ es una función analítica en todo el plano complejo y acotada, es decir $|f(z)| < M \ \forall z \in \mathbb{C}$, para una constante fija $M$, entonces $f(z)$ es una función constante.

**Teorema fundamental del álgebra**
Todo polinomio $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, con $n \geq 1$ y $a_n \neq 0$, tiene al menos una raiz.

Si esto es cierto y $z_1$ es esa raiz, entonces se puede factorizar $P(z) = (z - z_1)Q(z)$ con $Q(z)$ un polinomio de grado $n-1$, al cual le extendemos el anterior resultado y por lo tanto todo polinomio $P(z)$ de grado $n$ posee $n$ raices.

**Teorema del Argumento**
Si $f(z)$ es una función analítica sobre y en el interior de una curva cerrada $C$, salvo tal vez en un número finito de polos en el interior de $C$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P,$$

donde $N$ y $P$ son respectivamente el número de ceros y polos de $f(z)$ dentro de $C$.

Su demostración se basa en que si $\alpha$ es un cero de orden $n$ y $\beta$ es un polo de orden $p$ de $f(z)$, entonces la función se puede escribir $f(z) = (z-\alpha)^n g(z)$ con $g(\alpha) \neq 0$ y $f(z) = h(z)/(z-\beta)^p$ con $h(\beta)$ finito y $\neq 0$.

**Desigualdad de Cauchy**
Si $f(z)$ es analítica dentro y sobre una circunferencia $C$ de radio $R$ y centro en $z = a$, entonces

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{Mn!}{R^n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

donde $M$ es una constante tal que $|f(z)| < M$ sobre $C$, es decir $M$ es una cota superior de $|f(z)|$ sobre $C$.

## Problemas

**3.1** Dadas las siguientes funciones $f(z)$ en el plano complejo, determinar el valor de

$$\int_C f(z)dz,$$

para los circuitos que se indican:

a) $f(z) = y - x - 3x^2 i$, $C$ es el segmento desde $z_1 = 0$ hasta $z_2 = 1 + i$; también el caso de que $C$ sean los dos segmentos desde $z_1 = 0$ hasta $z_3 = i$ y de éste hasta $z_2 = 1 + i$;

b) $f(z) = z - 1$, donde $C$ es el arco de circunferencia $z(\theta) = 1 + e^{i\theta}$, desde $z_1 = 0$ hasta $z_2 = 2$.

c) $f(z) = e^z$ donde $C$ es el segmento que va desde $z_1 = \pi i$ hasta $z_2 = 1$, o bien el camino que une ambos puntos a lo largo de los ejes coordenados.

d) $f(z) = 1/z$ y donde $C$ es la circunferencia completa de radio $R$ con centro en el origen.

[Sol.a) $1 - i$ y $(1 - i)/2$; b) 0; c) $1 + e$ en ambos casos; d) $2\pi i$.]

**3.2** Si $C$ es el contorno cuadrado con vértices en los puntos $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1 + i$ y $z_4 = i$ demostrar, haciendo la integral, que

$$\oint_C (3z^2 + 1)dz = 0, \quad \text{y que} \quad \oint_C \bar{z}dz = 2i.$$

**3.3** Si $\alpha$ y $\beta$ son dos números complejos cualesquiera, demostrar que

$$\int_\alpha^\beta 2zdz = \beta^2 - \alpha^2,$$

a lo largo de cualquier camino que une $\alpha$ con $\beta$. ¿Qué sucederá si $\alpha = \beta$?

**3.4** Evaluar

$$\int_{(0,1)}^{(2,5)} (3x + y)dx + (2y - x)dy,$$

(a) a lo largo de la curva $y = x^2 + 1$; (b) según la recta que une $(0,1)$ con $(2,5)$; (c) por las rectas que van de $(0,1)$ a $(0,5)$ y luego de $(0,5)$ a $(2,5)$; (d) las rectas que van de $(0,1)$ a $(2,1)$ y de $(2,1)$ a $(2,5)$.

[Sol.a) 88/3; b) 32; c) 40; d) 24.]

**3.5** Calcular las primitivas de las siguientes integrales en las que la variable $x$ es real, usando la integración en el plano complejo:

$$\int e^{ax} \cos bx dx, \quad \int e^{ax} \sin bx dx.$$

**3.6** Calcular cada una de las integrales siguientes y donde el camino de integración es un circuito arbitrario que une los puntos límites de integración.

$$\text{a)} \quad \int_i^{i/2} e^{\pi z}\, dz, \quad \text{b)} \quad \int_0^{\pi+2i} \cos\frac{z}{2}\, dz, \quad \text{c)} \quad \int_1^3 (z-2)^3\, dz,$$

[Sol:a) $(1 + i)/\pi$; b) $e + 1/e$; c) 0.]

**3.7** Calcular la integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$$

cuando $\alpha > 0$ y para $\alpha < 0$.

Calcular la integral de

$$\int_0^\infty \cos \alpha x\, dx$$

para el mismo rango de valores de $\alpha$.

[Parcial Abril 2003]

**3.8** Si $C$ es la curva $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ que une los puntos $1 + i$ y $2 + 3i$ del plano complejo, determinar el valor de la integral siguiente a lo largo de dicha línea. Calcular también la integral usando una primitiva del integrando.

$$\int_C (12z^2 - 4iz)dz.$$

[Sol. $-156 + 38i$.]

**3.9** Evaluar la integral siguiente a lo largo de los circuitos que se indican:

$$\oint_C |z|^2 dz,$$

a) siendo $C_1$ el círculo $|z| = 1$,
b) siendo $C_2$ el círculo $|z - 1| = 1$.
[Sol. a) 0, b) $2\pi i$.]

**3.10** Evaluar la siguiente integral a lo largo del arco de circunferencia de radio 1 que une los puntos $z_1 = 1$ y $z_2 = i$, de las dos formas posibles. Determinar asímismo el valor de esta integral en ambos casos utilizando su función primitiva. Discutir el resutado.

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

**3.11** Evaluar las siguientes integrales, cuyo camino de integración $C$ es la circunferencia $|z| = 2$, utilizando la fórmula integral de Cauchy

$$\oint_C \frac{\sin 3z}{z + \pi/2} dz, \quad \oint_C \frac{e^{iz}}{z^3} dz, \quad \oint_C \frac{\sin^6 z}{z - \pi/6} dz, \quad \oint_C \frac{z dz}{(9 - z^2)(z + i)}$$

[Sol. $2\pi i$, $-\pi i$, $\pi i/32$, $\pi/5$.]

**3.12** Demostrar que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{z^2 + 1} dz = \sin t,$$

y si $C$ es la circunferencia $|z| = 3$.

**3.13** Evaluar la siguiente integral a lo largo de la curva $C$ definida por $z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 = (2 - 2i)z + (2 + 2i)\bar{z}$, desde el punto $z_1 = 1$ hasta el punto $z_2 = 2 + 2i$.

$$\int_C \bar{z}^2 dz + z^2 d\bar{z}$$

[Sol. 248/15.]

**3.14** Si $C$ es una curva simple cerrada en el plano complejo, que encierra una región de área $A$, demostrar que

$$A = \frac{1}{2i} \oint_C \bar{z} dz$$

**3.15** Si $C$ es una curva simple cerrada en el plano complejo, que encierra una región de área $A$, demostrar que

$$A = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx.$$

Usar este resultado para encontrar el área de una elipse de ecuaciones paramétricas $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

**3.16** Si $C$ es una curva simple cerrada en el plano que encierra una región $\mathcal{R}$ de área $A$, como este área se calcula

$$A = \int_{\mathcal{R}} dxdy,$$

utilizar el teorema de Green para reescribir la anterior integral en la forma

$$A = \int_{\mathcal{R}} dxdy = \int_{C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

escogiendo adecuadamente las funciones $P$ y $Q$.

**3.17** Calcular las raices del polinomio $P(z) = z^4 - z^2 - 2z + 2$. Probar que si el coeficiente de la potencia máxima de $z$ es 1, el producto de todas las raices es igual al término independiente de $z$. Comprobar que al ser de coeficientes reales si existe una raiz también existe su compleja conjugada. [Sol. $1, 1, -1 \pm i$.]

**3.18** Calcular las raices de los polinomios $P_3(z) = z^3 - z^2 + (3-i)z - 2 - 2i$ y $P_4(z) = z^4 + (1-3i)z^3 + (1+2i)z^2 + (1-13i)z - 10 + 2i$. Verificar que como los coeficientes no son todos reales, dada una raiz, su compleja conjugada no es necesariamente otra raiz.[Sol. $(z-i)(z+2i)(z-1-i)$ y $(z-i)(z+2i)(z-1-i)(z+2-3i)$.]

**3.19** Sea $C$ la circunferencia unidad $z = e^{i\theta}$ y $k$ una constante real. Calcular que

$$\oint_C \frac{e^{kz}}{z} dz,$$

es independiente de $k$, vale $2\pi i$ y deduzca a partir de ello la fórmula

$$\int_0^{\pi} d\theta e^{k\cos\theta} \cos(k \sin\theta) = \pi.$$

**3.20** Si $f(z)$ es analítica en el interior y sobre un contorno cerrado y orientado $C$, tal que el punto $z_0$ no está sobre $C$, demostrar que se cumple que

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz.$$

**3.21** Si $f(z)$ es analítica en el interior y sobre una curva $C$, probar que:

$$a) \quad f'(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} f(a + e^{i\theta}) d\theta, \quad b) \qquad \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ni\theta} f(a + e^{i\theta}) d\theta,$$

siendo $a$ un punto perteneciente a la región $\mathcal{R}$ encerrada por la curva $C$.

**3.22** Demostrar que el teorema de Green se puede generalizar en la forma:

$$\oint_C F(z, \bar{z}) dz = 2i \int\int_{\mathcal{R}} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} dA,$$

donde $dA$ representa el elemento de área $dxdy$.

**3.23** Sean $P(z,\bar{z})$ y $Q(z,\bar{z})$ funciones continuas con derivadas parciales continuas en una región $\mathcal{R}$ y en su contorno $C$. Entonces, probar que

$$\oint_C P(z,\bar{z})dz + Q(z,\bar{z})d\bar{z} = 2i \int\int_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial P}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dA.$$

**3.24** A partir de la fórmula integral de Cauchy se pueden obtener las fórmulas integrales de Poisson sobre un círculo, que expresan el valor de una función armónica de dos variables $u(r,\theta)$ en términos de los valores que dicha función toma sobre la circunferencia exterior. Demostrar que

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) u(R,\phi)}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi,$$

siendo $R$ el radio de la circunferencia, $\phi$ el ángulo que define cada uno de sus puntos y $(r,\theta)$ las coordenadas polares de un punto de su interior. Verificar que $u(r,\theta)$ es en efecto una función armónica.

**3.25** Siendo los parámetros $m$ y $a$ reales y positivos, calcular la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(mx)}{x(x^2+a^2)}\, dx \quad .$$

[Examen Junio 2002]

**3.26** Aplicar el teorema de Cauchy-Goursat a la función $f(z) = e^{-z^2}$ en el dominio $|x| \leq R$, $0 \leq y \leq 1$ y calcular la integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2x) dx \quad .$$

Para este problema es útil recordar que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. [Sol. $\sqrt{\pi}/2e$.] [Examen Septiembre 2002]

**3.27** Resolver las siguientes preguntas:
(a) Sea $f(z)$ una función analítica en $|z| < R$, con $R > 1$. Calcular

$$\oint_{|z|=1} \left(z + 2 + \frac{1}{z}\right) \frac{f(z)}{z}\, dz$$

en términos de $f$ y de sus derivadas.
(b) Encontrar todas las soluciones de $1^z = 2i$.
(c) Calcular el anillo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n^2} + \frac{n^2}{(2z)^n}\right).$$

[Examen Septiembre 2003]

**3.28** Calcular la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx$$

[Sol. $\pi/\sqrt{2}$.] [Examen Septiembre 2003]

**3.29** Calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad 0 < |\alpha| < 1.$$

Como $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$ siendo $\alpha$ un número no entero, es una función multivaluada, cuyo punto de ramificación es el $z = 0$, suponer un circuito que no contenga al semieje real positivo.
[Sol. $\pi/2\cos(\alpha\pi/2)$] [Examen Junio 2005]

**3.30** Determinar el valor de la integral definida en el plano complejo

$$\int_{-2}^{2} \frac{z}{(z^2+1)^2}\, dz$$

a lo largo de los siguientes caminos:
1) A lo largo de la recta sobre el eje real $x$ que une los puntos $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$.
2) A lo largo del semicírculo de radio 2 y centro el origen que une ambos puntos por la parte inferior del plano complejo en que $\operatorname{Im} z \leq 0$.
3) Calcular los residuos del integrando en sus polos.
4) Desarrollar el integrando en serie de Laurent alrededor del punto $z_0 = i$. ¿Cuál es el radio de convergencia de esta serie?
[Examen Parcial Abril 2006]

**3.31** Calcular la

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[5]{x}}{x^3+x}\, dx.$$

[Examen Junio 2007]

**3.32** Sabiendo que $f(z)$ es una función analítica en la región $|z| < 10$ y que $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f(2) = 3$ y $f'(2) = 4$, determinar el valor de la integral

$$\oint_{|z|=5} \left( z + (z-2)^2 - \frac{3}{z^2(z-2)} \right) f(z)dz$$

[Examen Septiembre 2007]

# Capítulo 4

# Series de potencias

**Serie de Taylor**
Como una función analítica $f(z)$ en un punto $z_0$ admite infinitas derivadas en ese punto, entonces se puede desarrollar en serie de Taylor:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n ,$$

donde la serie converge dentro de un círculo con centro en $z_0$ y de radio, en general, la distancia de $z_0$ hasta la singularidad de $f(z)$ más próxima. Los valores de las sucesivas derivadas en $z_0$ se pueden calcular directamente o bien mediante la fórmula integral de Cauchy:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

**Serie de Laurent**
Si el punto $z_0$ fuera un punto singular de la función $f(z)$, que es analítica sobre el contorno y en el interior de un anillo comprendido entre los círculos $C_1$ y $C_2$ con centro en $z_0$, entonces admite un desarrollo en la forma

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \cdots + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

que es convergente para todo punto $z$ perteneciente al anillo entre $C_1$ y $C_2$, y donde los coeficientes se calculan mediante

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_i} \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}} dz', \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

A la parte $\sum_0^\infty$ que contiene las potencias positivas de $(z - z_0)$, se le denomina la parte **analítica** de $f(z)$ y a la que contiene las potencias negativas (las potencias de $1/(z - z_0)$) se le denomina la parte **principal** del desarrollo en **serie de Laurent** de la función $f(z)$. La diferencia con la serie de Taylor es que en aquel caso solamente tenemos los coeficientes $a_n$ con $n \geq 0$ y que además coinciden con el valor de las derivadas $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$, cosa que en el desarrollo Laurent dichas derivadas no existen porque pudiera ser $z_0$ un punto singular, pero el cálculo de los coeficientes $a_n$ se puede hacer mediante una integral definida a lo largo de un circuito que rodee a la singularidad.

Para calcular los coeficientes $a_n$ con $n$ positivo, el circuito de integración es el exterior $C_2$, en tanto que los $a_n$ con $n$ negativo el circuito es el interior $C_1$, ambos recorridos en sentido positivo. Conviene observar que una vez fijados los circuitos $C_1$ y $C_2$ que limitan la región anular, los coeficientes $a_n$ son fijos e independientes del punto $z$ en el que se pretende evaluar la serie.
**Progresión geométrica:** $S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots a_1 r^{n-1} = a_1(1 - r^n)/(1 - r)$.
**Singularidades**
Si la parte principal del desarrollo en serie de Laurent de una función $f(z)$, alrededor de un punto $z_0$, contiene infinitos términos, se dice que $f(z)$ tiene en $z_0$ una singularidad **esencial**.

Si la parte principal tiene un número finito de términos

$$\frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \cdots \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n},$$

entonces se dice que $z_0$ es un **polo de orden** $n$ de $f(z)$. Si $n = 1$, entonces se dice que el polo es simple.

Si la función uniforme $f(z)$, no está definida en $z_0$, pero existe el $\lim_{z\to z_0} f(z)$, se dice que $z_0$ es una **singularidad evitable (o eliminable)**, pues nos permite definir $f(z_0) \equiv \lim_{z\to z_0} f(z)$.

Para el análisis de la singularidad de una función $f(z)$ en el infinito, se hace el cambio de variable $w = 1/z$ y se analiza el desarrollo en serie de Laurent de la función $F(w) \equiv f(1/w)$, alrededor de $w = 0$. La correspondiente singularidad se dice que es la singularidad de $f(z)$ en el infinito.

Se dice que un punto $z_0$ es un **punto de ramificación** de una función multivaluada $f(z)$ si se salta entre las distintas ramas de $f(z)$ cada vez que $z$ recorre un camino que rodea a $z_0$.

**Criterios de convergencia de series:** Una condición necesaria para la convergencia de una serie $\sum z_n$ es que $\lim_{n\to\infty} |z_n| = 0$. La serie funcional $\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n f_n(z)$ es absolutamente convergente para aquellos valores de $z$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n f_n(z)}{a_{n-1} f_{n-1}(z)} \right| < 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n f_n(z)|} < 1,$$

y divergente si el correspondiente límite es $> 1$.

**Teorema** Si una serie de números complejos $\sum z_n$ es absolutamente convergente (es decir converge la $\sum |z_n|$), entonces la serie es convergente.

**Teorema** Si una serie de potencias $\sum a_n z^n$ converge para $z = z_1$, entonces es absolutamente convergente para todo $z$ tal que $|z| < |z_1|$.

**Teorema** Una serie de potencias $\sum a_n z^n = S(z)$ representa a una función analítica $S(z)$ en todo punto $z$ del interior de su círculo de convergencia.

**Teorema** Una serie de potencias $S(z) = \sum a_n z^n$ puede derivarse término a término en todo punto interior de su círculo de convergencia. Esto es $S'(z) = \sum n a_n z^{n-1}$.

**Teorema** Si la serie $\sum a_n (z-z_0)^n$ converge hacia $f(z)$ en todos los puntos interiores a cierta circunferencia $|z - z_0| = R_0$, entonces esa serie es el desarrollo en serie de Taylor de la función $f(z)$ en potencias de $z - z_0$.

**Teorema** La serie de potencias que define a la función analítica $f(z)$ para valores de $z$ dentro del círculo de convergencia, es uniformemente convergente para todos los puntos interiores de su círculo de convergencia.

**Teorema** Toda serie de potencias de $f(z)$ puede derivarse término a término y define la serie de potencias de la función derivada $f'(z)$ para puntos $z$ interiores de su región de convergencia.

Este teorema se extiende tanto a las series de potencias positivas (parte analítica) como negativas (parte principal).

**Teorema** Si dos series de potencias $\sum a_n z^n = f(z)$ y $\sum b_m z^m = g(z)$ convergen respectivamente a las funciones analíticas $f(z)$ y $g(z)$ dentro de sus círculos de convergencia, la serie formada por las sumas de ambas

$$\left(\sum a_n z^n\right) + \left(\sum b_m z^m\right) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)z + (a_2 + b_2)z^2 + \cdots$$

converge hacia la función $f(z) + g(z)$ para aquellos puntos $z$ interiores a ambos círculos de convergencia.

**Teorema** Si dos series de potencias $\sum a_n z^n = f(z)$ y $\sum b_m z^m = g(z)$ convergen respectivamente a las funciones analíticas $f(z)$ y $g(z)$ dentro de sus círculos de convergencia, la serie formada por los productos de ambas

$$\left(\sum a_n z^n\right)\left(\sum b_m z^m\right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)z^2 + \cdots$$

converge hacia la función $f(z)g(z)$ para aquellos puntos $z$ interiores a ambos círculos de convergencia.

**Teorema: Ceros de las funciones analíticas.** A menos que $f$ sea idénticamente nula, si es analítica en un punto $z_0$, existe un entorno de $z_0$ en el cual la función no se anula, excepto posiblemente en el propio punto. Por lo tanto, los ceros de una función analítica son puntos aislados.

## Problemas

**4.1** Encontrar el radio de convergencia de las series

$$\text{a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$\text{b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} n! z^n.$$

**4.2** Encontrar la serie de Laurent de las siguientes funciones y a partir del punto $z_0$ que se indica, determinando su radio de convergencia

$$\text{a)}\quad \frac{e^{2z}}{(z-1)^3};\quad z_0 = 1, \qquad \text{b)}\quad (z-3)\sin\frac{1}{z+2};\quad z_0 = -2.$$

$$\text{c)}\quad \frac{z-\sin z}{z^3};\quad z_0 = 0, \qquad \text{d)}\quad \frac{z}{(z+1)(z+2)};\quad z_0 = -2.$$

**4.3** Encontrar los conjuntos de puntos $z$ en los cuales las siguientes series de Laurent son convergentes.

$$\text{a)}\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} z^n, \quad \text{b)}\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{3^n+1}, \quad \text{c)}\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-n^2}(z+1)^n, \quad \text{d)}\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+1},$$

$$\text{e)}\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(2^{-n^3}+1\right)^{-1} (z-a)^{2n}, \quad \text{f)}\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n z^n, \quad \text{g)}\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-n^2} z^{n^3}.$$

**4.4** Desarrollar la función $1/(z-3)$ en una serie de potencias de $z$ que sea convergente: a) para $|z| < 3$ y b) para $|z| > 3$.

**4.5** Demostrar que el punto $z = a$ es una singularidad evitable de las funciones que se indican:

$$\text{a)}\quad \frac{z^2-1}{z-1}, (a=1); \quad \text{b)}\quad \frac{\sin z}{z}, (a=0); \quad \text{c)}\quad \frac{z}{\tan z}, (a=0);$$

$$\text{d)}\quad \frac{1-\cos z}{z^2}(a=0); \quad \text{e)}\quad \frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{\sin z}, (a=0); \quad \text{f)}\quad \frac{z^2-1}{z^3+1}, (a=\infty).$$

**4.6** Demostrar que el punto $z = a$ es un polo de las funciones que se citan, indicando el orden del polo.

$$\text{a)}\quad \frac{1}{z}, (a=0); \quad \text{b)}\quad \frac{1}{(z^2+1)^2}, (a=i); \quad \text{c)}\quad \frac{z^2+1}{z+1}, (a=\infty);$$

$$\text{d)}\quad \frac{z}{1-\cos z}(a=0); \quad \text{e)}\quad \frac{z}{e^z+1}, (a=\pi i); \quad \text{f)}\quad \tan \pi z, (a = \pm 1/2, \pm 3/2, \ldots).$$

**4.7** Demostrar que el punto $z = a$ es una singularidad esencial de las funciones que se indican:

$$\text{a)}\quad e^z, (a=\infty); \quad \text{b)}\quad e^{-z^2}, (a=\infty); \quad \text{c)}\quad \sin\frac{\pi}{z^2}, (a=0);$$

$$\text{d)}\quad z^2\cos\frac{\pi}{z}(a=0); \quad \text{e)}\quad e^{\tan z}, (a=\pi/2); \quad \text{f)}\quad \sin e^z, (a=\infty).$$

**4.8** Sea la función de variable compleja

$$e^{\frac{1}{1-z}}.$$

(a) Decir si el punto $z_0 = 1$ es un polo simple, un polo esencial o una singularidad evitable de esa función.

(b) Desarrollar en serie de potencias de $z$, alrededor del punto $z_0 = 0$ y en la región $1 < |z| < \infty$ la función

$$\frac{e^z}{z(1-z)}$$

(c) Escribir explícitamente los coeficientes del anterior desarrollo que afectan a las potencias $z^n$ para $n = -2, -1, 0, 1, 2$.

[Parcial Abril 2003]

**4.9** Desarrollar en serie de Laurent según potencias de $z - a$ en la corona $D$, las siguientes funciones. Se indica entre paréntesis el punto $a$ y la corona $D$ dentro de la cual la serie sea convergente.

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} & \dfrac{1}{z(z-3)^2}, \quad (a = 1,\ D : 1 < |z-1| < 2), \\
\text{b)} & \dfrac{1}{(z^2-9)z^2}, \quad (a = 1,\ D : 1 < |z-1| < 2), \\
\text{c)} & \dfrac{z+i}{z^2}, \quad (a = i,\ -i \in D), \\
\text{d)} & \dfrac{z^2-1}{z^2+1}, \quad (a = 1,\ 2i \in D), \\
\text{e)} & \dfrac{2z}{z^2-2i}, \quad (a = 1,\ -1 \in D), \\
\text{f)} & \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}, \quad (a = 0,\ -\dfrac{3}{2} \in D).
\end{array}$$

**4.10** Sea

$$f(z) = \frac{1}{\cos\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)}.$$

(a) Determinar todos sus puntos singulares y clasificarlos.
(b) Encontrar la parte principal del desarrollo de Laurent en la región $0 < |z - (\pi+2)/(\pi-2)| < R$
[Examen Junio 2007]

**4.11** a) Demostrar que para todo complejo $p$, la función $(1+z)^p$ admite el siguiente desarrollo en serie de potencias alrededor del punto $z_0 = 0$:

$$(1+z)^p = 1 + \frac{p}{1!}\,z + \frac{p(p-1)}{2!}\,z^2 + \cdots + \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}\,z^n + \cdots$$

¿Cuál es el radio de convergencia de esta serie?
b) ¿Cómo será el desarrollo en serie de esta función alrededor del punto $z_0 = 0$ pero que sea convergente para $|z| > 1$?
c) Aplicar los resultados anteriores para encontrar sendas series convergentes en potencias de $z$ alrededor de $z_0 = 0$ de la función $(2i + z)^{-1/2}$, indicando sus regiones de convergencia. [Parcial Abril 2002]

**4.12** Dada la función compleja

$$\frac{z^3}{(z+1)(z-2)},$$

se pide:

(a) Encontrar los residuos en sus polos y en el punto del infinito.

(b) Encontrar el desarrollo en serie de Laurent en potencias de $(z+1)$, convergente en el dominio $0 < |z+1| < 3$.

(c) Encontrar el desarrollo en serie de Laurent en potencias de $(z+1)$, convergente en el dominio $|z+1| > 3$.

(d) Desarrollar en serie de potencias de $z$ alrededor del punto del infinito.

[Parcial Abril 2004]

**4.13** Obtener el desarrollo en serie de la función $1/(1-z)$ alrededor del punto $z_0 = 0$. Demostrar que los desarrollos en serie de sus derivadas se escriben como

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}, \quad \frac{1}{(1-z)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2}, \ldots \quad \frac{1}{(1-z)^k} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} z^{n-k+1}$$

obtenidos sin más que derivar término a término la serie de la función dada. ¿En qué dominio son convergentes estas últimas?

**4.14** Desarrollar en serie la función $1/z$ alrededor del punto $z_0 = 1$. Obtener el desarrollo en potencias de $z-1$ de las funciones $1/z^2$ y $1/z^3$ indicando la región de convergencia.

**4.15** Encontrar la parte principal de la serie de Laurent para las siguientes funciones, en el entorno del punto $z_0$ que se indica:

a) $\dfrac{z}{(z+2)^2}, \quad (z_0 = -2).$

b) $\dfrac{z-1}{\sin^2 z}, \quad (z_0 = 0).$

c) $\dfrac{e^{iz}}{z^2+b^2}, \quad (z_0 = ib, \quad b > 0).$

d) $\dfrac{(z^2+1)^2}{z^2+b^2}, \quad (z_0 = \infty).$

[Sol.(a) $-2/(z+2)^2 + 1/(z+2)$; (b) $-1/z^2 + 1/z$; (c) $-ie^{-b}/2b(z-ib)$; (d) $z^2$. ]

**4.16** Calcular los desarrollos de Laurent de $f(z) = 1/z(z^2-1)$ en los anillos $0 < |z-1| < 1$ y $1 < |z-1| < 2$. [Examen Junio 2002]

**4.17** Resolver las siguientes preguntas:

1. Calcular el desarrollo en serie de potencias centrada en $z = 1$ de la función $\log(1+z)$ y hallar su radio de convergencia.

2. Determinar el dominio de analiticidad y clasificar todas las singularidades de la función

$$f(z) = \frac{(z-1)(z-2)^3}{\sin^3(\pi z)}.$$

Calcular el residuo en $z = 2$.

3. Hallar el desarrollo de Laurent de $f(z) = 1/(z^2-1)^2$ en $0 < |z-1| < 2$.

[Examen Septiembre 2002]

**4.18** Clasificar las singularidades aisladas de

$$f(z) = \frac{z - 2\pi i}{e^z - 1} + \frac{2\pi i}{z}$$

así como el valor del límite de $f(z)$ en sus singularidades evitables y el residuo donde proceda. [Examen Junio 2003]

**4.19** Sea

$$f(z) = \frac{\ln(1+z) - z}{z^m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Analizar el tipo de singularidad en $z_0 = 0$ y calcular el residuo de $f(z)$ en ese punto para cada valor de $m$.

[Examen Septiembre 2003]

**4.20** (a) Determina y clasifica las posibles singularidades de $f(z) = \frac{1}{z^2 \sinh z}$ .
(b) Hallar la parte principal del desarrollo de Laurent de $f$ en potencias de $z$ en un anillo $0 < |z| < R$. ¿Cuál es el valor de $R$?.
(c) Calcular

$$\int_{|z|=1} f(z)dz \quad y \quad \int_{|z|=5} f(z)dz \quad .$$

[Examen Junio 2004]

**4.21** (a) Encontrar la parte principal del desarrollo en serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{e^z + 1}{e^z - 1},$$

alrededor de los puntos $z_1 = 2\pi i$ y $z_2 = -4\pi i$.
(b) ¿Cuál será el radio de convergencia de la correspondiente serie en el caso ($z_2 = -4\pi i$)?
(c) Calcular los dos primeros términos no nulos de la parte analítica de su desarrollo en serie de Laurent alrededor del punto $z_3 = 0$.
(d) Clasificar las singularidades de $f(z)$.¿Es el punto del infinito un punto singular?
[Examen Junio 2006]

**4.22** (a)Desarrollar en potencias de $z$, alrededor del punto del infinito, la función

$$\frac{\sinh\left(1 - \frac{1}{z}\right)}{(z-1)^2 z^3}$$

(b) ¿Cuánto vale el residuo de la función en el infinito?
(c) Determinar las singularidades de la función indicando si se trata de polos de orden finito, polos esenciales o singularidades evitables. En el caso de polos de orden finito, determinar su orden. En todos los casos calcular los residuos en los polos. [Parcial Abril 2007]

# Capítulo 5

# Residuos

**Residuo:** Se denomina Residuo de una función en un punto $z_0$, y lo representamos por $\mathrm{Res}f(z_0)$, a la magnitud

$$\mathrm{Res}_{z=z_0}\, f(z) = \lim_{R\to 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=R} f(z)dz = \mathrm{Res}\, f(z_0),$$

donde $R > 0$ es tan pequeño como queramos. El cálculo del residuo en un punto involucra el cálculo de una integral a lo largo de un circuito cerrado que rodea al punto seguida de un límite $R \to 0$.

Si el punto $z_0$ es un punto regular de $f(z)$ su residuo en $z_0$ es nulo. Para el cálculo del residuo de una función en el punto del infinito se define mediante:

$$\mathrm{Res}\, f(\infty) = -\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} f(z)dz.$$

**Teorema de los Residuos**
Si una función $f(z)$, analítica en una región $\mathcal{R}$ salvo tal vez en un conjunto finito de puntos singulares $z_i$, $i = 1, \ldots, k$, entonces si $C$ es un circuito cerrado contenido en $\mathcal{R}$ y que encierra a los anteriores $k$ puntos singulares, se tiene que

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} (\mathrm{Res}f(z_i)).$$

Si el punto $z_0$ es un polo simple, entonces

$$\mathrm{Res}f(z_0) = \lim_{z\to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Si el punto $z_0$ es un polo de orden $n$, entonces

$$\mathrm{Res}f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z - z_0)^n f(z)\right).$$

**Corolario** Si consideramos funciones analíticas que solamente poseen puntos singulares aislados, entonces la suma de los residuos en todos sus puntos, incluido el infinito, vale 0.

**Corolario** Si una función es desarrollable en serie de Laurent alrededor de un punto singular aislado $z_0$, entonces el coeficiente $a_{-1}$ de su desarrollo en serie de Laurent, es el **residuo** de $f(z)$ en $z_0$.

El residuo en el punto del infinito, tanto si este punto es singular como si no lo es, coincide con el coeficiente cambiado de signo $-a_{-1}$ del desarrollo en potencias de $z$ alrededor del punto del infinito. Puede resultar que aunque el punto del infinito sea un punto regular de $f(z)$, su residuo sea diferente de cero.

## Problemas

**5.1** Para cada una de las siguientes funciones, determínense los polos y los residuos en los polos:

$$\text{a)}\quad \frac{2z+1}{z^2-z-2};\quad \text{b)}\quad \left(\frac{z+1}{z-1}\right);\quad \text{c)}\quad \frac{\sin z}{z^2};\quad \text{d)}\quad \frac{1}{\cosh z};\quad \text{e)}\quad \cot z;$$

**5.2** Evaluar

$$\oint_C e^{-1/z}\sinh(1/z)dz,$$

donde $C$ es la circunferencia $|z|=1$.

**5.3** Demostrar, pasando al campo complejo, las siguientes integrales:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2},\quad \int_0^\infty \sin x^2\,dx = \int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

**5.4** Calcular la integral

$$\oint_C \frac{\sin z}{(z^3-z)(z-i)}dz$$

donde $C$ es:
a) El circuito cerrado $|z-1|=1$.
b) El circuito cerrado $|z|=2$.
[Sol. $[\pi(i-1)\sin 1]/2$ y $\pi i(\sin 1-\sinh 1)$.][Parcial Abril 2004]

**5.5** Calcular

$$\text{a)}\quad \mathrm{Res}_{z=\infty}\frac{\sin z}{z^2},\quad \text{b)}\quad \mathrm{Res}_{z=\infty}e^{i/z},\quad \text{c)}\quad \mathrm{Res}_{z=1}\frac{e^z}{(z-1)^2},$$

$$\text{d)}\quad \mathrm{Res}_{z=\infty}z^2\sin\frac{\pi}{z},\quad \text{e)}\quad \mathrm{Res}_{z=\infty}z^n e^{a/z},\quad \text{f)}\quad \mathrm{Res}_{z=1}ze^{\frac{1}{z-1}}.$$

[Sol. (a) $-1$; (b) $-i$; (c) $e$; (d) $\pi^3/6$; (e) $-a^{n+1}/(n+1)!$; (f) $3/2$.]

**5.6** Encontrar los residuos de las funciones que se indican en todos sus puntos singulares finitos

$$\text{a)}\quad \frac{1}{z+z^3},\quad \text{b)}\quad \frac{z^2}{1+z^4},\quad \text{c)}\quad \frac{1}{(z^2+1)^3},$$

$$\text{d)}\quad \frac{\sin\pi z}{(z-1)^3},\quad \text{e)}\quad \frac{1}{\sin z^2},\quad \text{f)}\quad \frac{1}{e^z+1}.$$

**5.7** Encontrar los residuos de las funciones que se indican en todos sus puntos singulares y en el infinito:

$$\text{a)}\quad \frac{1}{z^6(z-2)},\quad \text{b)}\quad \frac{1+z^8}{z^6(z+2)},\quad \text{c)}\quad \frac{1+z^{2n}}{z^n(z-a)},\quad a\neq 0, n=1,2,\ldots$$

$$\text{d)}\quad \sin z\sin\frac{1}{z},\quad \text{e)}\quad \frac{\cos z}{(z^2+1)^2},\quad \text{f)}\quad \frac{\sin z}{(z^2+1)^2}.$$

**5.8** Calcular las siguientes integrales a lo largo del contorno $C$ de la región $D$ que se indica:

$$\text{a)}\quad \int_C \frac{dz}{1+z^4},\quad (D:|z-1|<1),$$

$$\text{b)}\quad \int_C \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)},\quad (D:|z-1-i|<2),$$

$$\text{c)}\quad \int_C \frac{\sin z}{(z+1)^3}dz,\quad (D:x^{2/3}+y^{2/3}<2^{2/3}),$$

$$\text{d)}\quad \int_C \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2},\quad (D:2<|z|<4),$$

$$\text{e)}\quad \int_C \frac{z}{z+3}e^{1/3z}dz,\quad (D:|z|>4).$$

**5.9** Probar que la integral en variables reales

$$I = \int_0^\infty \frac{(\ln u)^2}{1+u^2}\, du = \frac{\pi^3}{8}.$$

(Sugerencia: Tomar como circuito dos semicírculos centrados en el origen, de radios $\epsilon \to 0$ y $R \to \infty$, unidos a lo largo de los dos tramos del eje $OX$.)

**5.10** Verificar que la integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad a > |b|.$$

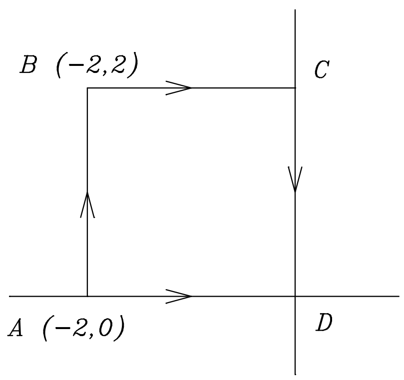
**5.11** Verificar que la integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta} d\theta = \frac{\pi}{12}.$$

**5.12** Dada la siguiente función de la variable compleja $z$,

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 2(1-i)z - 2i},$$

determinar:
a) la integral $\int f(z)dz$ a lo largo de la recta que va desde el punto $A$, $z_1 = -2$ hasta el punto $D$, $z_2 = 0$.
b) la integral $\int f(z)dz$ entre los dos mismos puntos, pero ahora a lo largo del camino $ABCD$ indicado en la figura.
c) Determinar los polos de $f(z)$ y los residuos en los mismos.
d) Calcular los polos de su función derivada $f'(z)$ y los residuos en los mismos.
e) Encontrar el desarrollo en serie de Laurent de la función $f''(z)$ alrededor del punto $z_0 = -1 + i$. ¿Para qué valores de $z$ es esta serie convergente? [Parcial Abril 2002]




**5.13** Sea dada la elipse $E$ de semiejes $a$ y $b$, $a > b$, $z(\theta) = a\cos\theta + ib\sin\theta$, $0 \le \theta \le \pi$. Si la desplazamos un valor $z_0 = c$, obtenemos $z_E(\theta) = a\cos\theta - c + ib\sin\theta$, $0 \le \theta \le \pi$. Demostrar que las integrales

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{a - c\cos\theta}{a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta} d\theta = \frac{2\pi}{a} H(a-c),$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{a - c\cos\theta}{c^2 + a^2\cos^2\theta - 2ac\cos\theta + b^2\sin^2\theta} d\theta = \frac{2\pi}{b} H(a-c),$$

siendo $H(x)$ la función escalón de Heaviside, es decir

$$H(x) = 0, \quad x < 0, \quad H(x) = 1, \quad x > 1.$$

Demostrar asímismo que

$$\mathrm{Im} \oint_E \frac{dz}{z} = bI_2 = 2\pi H(a-c).$$

**5.14** Calcular el valor de la integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta}, \quad a > |b|.$$

Aplicar el resultado anterior para calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5 - 3\cos\theta)^2}.$$

[Sol. $2\pi/\sqrt{a^2 - b^2}$ y $5\pi/32$.] [Parcial Abril 2002]

**5.15** Sabiendo que $a > 0$, calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^4 + 4}\, dx$$

[Sol. $\pi e^{-a} \sin a/2$.] [Examen Junio 2003]

**5.16** Calcular la integral

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^5}, \qquad a > 0.$$

[Sol. $35\pi/256a^9$] [Examen Septiembre 2004]

**5.17** Calcular

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^6 + 1)}\, dx \quad .$$

$$\text{Sol.} \quad I = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2}{3\sqrt{e}}\cos(\sqrt{3}/2) - \frac{1}{3e}\right)$$

[Examen Junio 2004]

**5.18** Encontrar el residuo en el punto $z_0$ de la función $F(z)$ definida mediante

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)},$$

si:
(a) La función $f(z)$ es regular en $z_0$, pero el punto $z_0$ es un cero de orden $n$ de la función $f(z)$.
(b) El punto $z_0$ es un polo de orden $m$ de la función $f(z)$.
(c) Aplicar los resultados anteriores a la función $F(z)$ construida a partir de $f_1(z) = (z - 1 + 2i)^3$ en el punto $z_1 = 1 - 2i$ y a partir de la función $f_2(z) = 1/(z-i)^4$ an el punto $z_2 = i$.
[Examen Junio 2005]

**5.19** Resolver la siguiente integral definida:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4x + 5)^2}$$

**5.20** Calcula la siguiente integral impropia, siendo $a > 0$ y $b > 0$

$$\int_0^{\infty} \frac{(x^2 - b^2)\sin ax}{(x^2 + b^2)x} dx.$$

[Sol. $-\pi/2 + \pi e^{-ab}$]

**5.21** Sea
$$f(z) = \frac{z^8}{(z-1)^4} + z^2 \sin\left(\frac{1}{z+1}\right).$$
Clasifica sus puntos singulares finitos e infinitos aislados y calcula la integral
$$\oint_{|z|=2} f(z)dz$$
[Examen Septiembre 2006]

**5.22** Calcular la
$$\int_0^{4\pi} \frac{2\cos\theta}{-5+4\sin(\theta/2)}d\theta$$
[Examen Septiembre 2006]

**5.23** Calcular las integrales
$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta, \qquad \int_0^{2\pi} \sin^3\theta d\theta,$$
utilizando técnicas de variable compleja.[Parcial Abril 2007]

**5.24** Calcular la
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\sin^2(\theta/2)}$$
[Examen Septiembre 2007]

# Capítulo 6

# Transformación conforme

Cuando en un dominio $\mathcal{R}$ de variables $x_1, \ldots, x_n$ hacemos un cambio de variables a otras $y_1, \ldots, y_n$, el elemento de volumen de ese espacio transforma:

$$dy_1 dy_2 \cdots dy_n = \left| \frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \right| dx_1 dx_2 \cdots dx_n,$$

siendo $|\partial(y_1, \ldots, y_n)/\partial(x_1, \ldots, x_n)|$ el determinante de la matriz Jacobiana (el Jacobiano) de la transformación.

Toda función analítica puede ser considerada como una transformación del plano $(x, y)$ en el plano $(u, v)$. El Jacobiano de la transformación es el determinante

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = |f'(x, y)|^2.$$

Por lo tanto la transformación es invertible en aquellos puntos en los que el Jacobiano sea distinto de cero, es decir $f'(z) \neq 0$. Los puntos en los que $f'(z) = 0$ reciben el nombre de puntos **críticos** de la transformación.

**Transformación conforme**

Si $w_0 = f(z_0)$ es el punto transformado del $z_0$ mediante la función analítica $f(z)$, entonces un elemento de arco en $z_0$, $\Delta z$ se transforma en el elemento de arco $\Delta w$ en $w_0$. Se tiene que en el límite $\Delta w/\Delta z = f'(z_0)$, con lo que el $\arg \Delta w = \arg \Delta z + \arg f'(z_0)$. Además de cambiar de tamaño, $\Delta w$ aparece girado un ángulo $\arg f'(z_0)$ respecto de $\Delta z$, por lo que dos curvas cualesquiera que pasen por $z_0$ tienen por curvas transformadas otras dos curvas que en $w_0$ forman el mismo ángulo. Se dice que la transformación conserva la forma local de la orientación entre curvas, o que es una transformación **Conforme**. Como $|\Delta w| = |\Delta z||f'(z_0)|$, entonces el área de una figura pequeña en $z_0$ queda reescalada en el factor $|f'(z_0)|^2$, que es precisamente el Jacobiano de la transformación en ese punto.

Los paralelogramos infinitesimales en cada punto se transforman en paralelogramos infinitesimales con su área reescalada en el factor $|f'(z_0)|^2$ y girados un ángulo que es $\arg f'(z_0)$. Las figuras geométricas finitas no conservarán en general su forma, ya que tanto el factor de escala como el giro son funciones del punto $z_0$, por lo que en general la forma global de una figura transformada no tiene por qué ser idéntica a la figura primitiva.

**Sistemas de curvas ortogonales**

Si $w = u + iv = f(z) \equiv f(x + iy)$ resulta que las curvas $u(x, y)$ =cte. y las curvas $v(x, y)$ =cte. forman un sistema de curvas ortogonales dos a dos en aquellos puntos en los que $f'(z) \neq 0$.

**Transformación de funciones armónicas**

Si $H(x, y)$ es una función armónica de las variables $x$ e $y$ y tenemos una función analítica $z = g(w) \equiv g(u + iv)$ que nos produce las funciones $x(u, v)$ e $y(u, v)$, entonces la función de las variables $u$ y $v$, $L(u, v) = H(x(u, v), y(u, v))$ es una función armónica de estas nuevas variables.

Además las curvas $H(x, y) = C$, son transformadas en las curvas $L(u, v) = C$, mediante la transformación analítica $z = f(w)$ en los puntos en que $f'(w) \neq 0$.

## Problemas

**6.1** Verificar que el elemento de área en el plano en coordenadas cartesianas $dxdy$ se escribe en coordenadas polares como $rdrd\theta$, siendo $r$ el Jacobiano de la transformación de coordenadas.

**6.2** Se denomina **transformación homográfica**, también llamada a veces **transformación bilineal o lineal fraccionaria** a la

$$w \equiv T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \gamma\beta \neq 0.$$

Demostrar que si no se cumple la condición $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$, entonces la transformación no es una transformación conforme.

**6.3** Demostrar que la transformación homográfica inversa es la

$$z = \frac{\delta w - \beta}{-\gamma w + \alpha}$$

con lo que el conjunto de transformaciones homográficas forma un grupo que es homomorfo al grupo de matrices complejas $2 \times 2$ de determinante unidad, $SL(2, \mathbb{C})$.

**6.4** Demostrar que la transformación homográfica se puede considerar como la combinación de las siguientes transformaciones: Traslación, rotación, homotecia y de una inversión. Caracterizar cómo deben ser los parámetros $\alpha, \beta, \gamma$ y $\delta$ para cada una de estas operaciones.

**6.5** Demostrar que una transformación homográfica transforma círculos del plano $z$ en círculos o rectas del plano $w$. Asímismo, demostrar que la imagen de una recta es otra recta o un círculo.

**6.6** Demostrar que cualquier transformación homográfica $w(z)$ verifica la ecuación diferencial $2w'w''' = 3(w'')^2$

**6.7** Encontrar para las siguientes transformaciones las imágenes de los dominios que se indican:

$$\text{(a) } w = i\frac{z+1}{z-1}, \quad \text{el disco } |z| < 1, \quad \text{(b) } w = \frac{z}{z-1}, \quad \text{el sector } 0 < \arg z < \pi/4,$$

$$\text{(c) } w = \frac{z}{z-1}, \quad \text{la banda } 0 < x < 1.$$

**6.8** Encontrar los puntos fijos (o invariantes) de la transformación

$$w = \frac{2z - 5}{z + 4}$$

[Sol. $z = -1 \pm 2i$.]

**6.9** Encontrar los puntos simétricos (o inversos) del punto $3 + 4i$ con respecto a los círculos

$$\text{(a) } |z| = 1, \quad \text{(b) } |z - 1| = 1, \quad \text{(c) } |z - i| = 2.$$

**6.10** Demostrar que la transformación homográfica tiene las propiedades siguientes:
(a) Posee al menos un punto fijo (a distancia finita o en el infinito);
(b) Posee como máximo dos puntos fijos (a distancia finita o en el infinito).

**6.11** Demostrar que una transformación homográfica $T(z)$ que tiene un único punto fijo $a$, verifica la ecuación:

$$\frac{1}{T(z) - a} = \frac{1}{z - a} + A,$$

si $a$ es finito, o bien $T(z) = z + A$ si $a = \infty$ y donde $A$ es un número complejo constante.

**6.12** Demostrar que una transformación homográfica $T(z)$ que tiene dos puntos fijos finitos $a$ y $b$ con $a \neq b$, verifica la ecuación:

$$\frac{T(z)-a}{T(z)-b} = k\frac{z-a}{z-b},$$

donde $k$ es un número complejo constante distinto de 1.

**6.13** Demostrar que si $z_1$, $z_2$ y $z_3$ son tres puntos distintos finitos y $w_1$, $w_2$ y $w_3$ otros tres puntos distintos y finitos, existe una única transformación homográfica que los relaciona mediante $w_i = f(z_i)$ y que esta función se puede obtener mediante

$$\left(\frac{w-w_1}{w-w_2}\right)\left(\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}\right) = \left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)\left(\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\right).$$

¿Cómo es la transformación si alguno de los $z_i$ y/o de los $w_i$ es el punto del infinito?

**6.14** Encontrar la transformación homográfica que lleva los puntos $-1$, $i$ y $1+i$ a los puntos

$$\text{(a) } 0, 1, \infty, \quad \text{(b) } 1, \infty, 0, \quad \text{(c) } 2, 3, 4.$$

**6.15** Encontrar la transformación homográfica que lleva los puntos $0$, $1+i$ y $2i$ a los puntos

$$\text{(a) } 4, 2+2i, 0, \quad \text{(b) } 0, 2+2i, 4, \quad \text{(c) } 0, \infty, 2i.$$

Encontrar la imagen del disco $|z-i| < 1$ por las aplicaciones a que dichas transformaciones dan lugar.

Asímismo las transformaciones que nos llevan los puntos $i, \infty, -i$ a los puntos

$$\text{(d) } 2, 1+i, 0, \quad \text{(e) } 0, 1, \infty, \quad \text{(f) } -2, 2i, 2,$$

y encontrar la imagen del semiplano $\operatorname{Re} z > 0$ mediante la correspondiente transformación.

[Sol. (a) $w = 2iz + 4$, $|w-2| < 2$,(b) $w = 2zi/(iz+1)$, $|w-2| > 2$, (c) $w = (i-1)z/(z-1-i)$, $\operatorname{Re} w > 0$.]

**6.16** Supongamos que la función $w = f(z)$ posee por desarrollo en serie de Taylor alrededor del punto $a$:

$$w = f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \cdots$$

Demostrar que si las derivadas $f^{(k)} = 0$ para $k = 1, \ldots, n-1$ pero $f^{(n)} \neq 0$, entonces los ángulos que forman las tangentes a las curvas que pasan por el punto crítico $a$ en el plano $z$, se multiplican por $n$ para sus imágenes en el plano $w$.

**6.17** Demostrar que si en el plano $z$ tenemos una curva caracterizada por sus ecuaciones paramétricas $x = F(t)$, $y = G(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, entonces la transformación al plano $w$ dada por $z = F(w) + iG(w)$, transforma la curva dada en el segmento de eje real $[t_1, t_2]$. Aplicarlo al caso de la elipse centrada en el origen y de semiejes $a$ y $b$.

**6.18** Demostrar que si $H(x, y)$ es una función armónica y $z = f(w)$, es decir $x + iy = f(u + iv)$ es una función analítica de $w$, el cambio de variables definido por $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ es tal que la función $F(u, v) = H(x(u, v), y(u, v))$ estambién una función armónica en las variables $u$ y $v$.

# Capítulo 7

# Aplicaciones

**Teorema de la aplicación de Riemann** Sea $C$ una curva simplemente conexa que es el contorno de una región $\mathcal{R}$. Sea $C'$ la circunferencia unidad centrada en el origen, que es el contorno de la región $\mathcal{R}'$, llamada disco unidad. Entonces existe una aplicación analítica 1 a 1 en $\mathcal{R}$, $w = f(z)$ que aplica $\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}'$ y $C$ en $C'$.

Esta función depende de tres constantes arbitrarias y aunque Riemann demuestra su existencia no suministra ningún método para encontrarla.

**Problema de Dirichlet en el círculo unidad** Sea $C$ la circunferencia unidad centrada en el origen, que encierra al disco unidad $\mathcal{R}$. Una función $F(r, \theta)$ que satisface la ecuación de Laplace en $\mathcal{R}$ y que toma unos valores determinados $h(\phi) \equiv F(1, \phi)$ sobre $C$ viene dada por

$$F(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - r^2)h(\phi)d\phi}{1 - 2r\cos(\theta - \phi) + r^2}.$$

**Problema de Dirichlet en el semiplano superior complejo** Una función armónica $F(x, y)$ en el semiplano superior $\mathrm{Im}(z) > 0$ y que toma unos valores determinados $h(x) \equiv F(x, 0)$ sobre el eje real viene dada por

$$F(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y h(t) dt}{y^2 + (x - t)^2}.$$

La **función Gama** de Euler $\Gamma(z)$ es la generalización a variables continuas de la función factorial, $\Gamma(n + 1) = n!$ y se define como

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (\mathrm{Re}(z) > 0).$$

Para $\mathrm{Re}(z) \leq 0$ se puede extender por prolongación analítica. Posee polos simples en $z = 0, -1, -2, \ldots$.

La **función Beta** de Euler se define como

$$B(r, s) = \int_0^1 t^{r-1}(1 - t)^{s-1} dt, \quad (r > 0, s > 0).$$

Si $r$ o $s$ son enteros, están relacionadas mediante

$$B(r, s) = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r + s)}.$$

La **función Zeta** de Riemann $\zeta(z)$ se define para $\mathrm{Re}(z) > 1$ como

$$\zeta(z) \equiv \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}, \quad \mathrm{Re}(z) > 1.$$

Se puede ver que

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t + 1} dt, \quad (\mathrm{Re}(z) > 0),$$

cuya única singularidad es un polo simple en $z = 1$ y de residuo 1.

**Problemas físicos**

Las ecuaciones del potencial electrostático $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$ son tales que en los puntos del espacio en los que la densidad de carga eléctrica se anule $\rho = 0$, el potencial satisface la ecuación de Laplace. En el caso de problemas bidimensionales se podrá representar el potencial mediante la parte real (o imaginaria) de una función analítica, de tal manera que la parte imaginaria (o real) representará a las curvas que son ortogonales a las superficies equipotenciales, es decir a las líneas del campo eléctrico. De esta manera una misma función analítica describe a la vez las superficies equipotenciales y las líneas del campo. Los puntos en los que existan singularidades de la función analítica, estarán relacionados con las fuentes del campo pues en ellos se deja de cumplir la ecuación de Laplace.

Otros problemas físicos interesantes pueden ser aquellos problemas bidimensionales en los que existan fenómenos de transmisión de ondas, cuya ecuación es de la forma

$$\nabla^2 f(x, y, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial t^2},$$

y en el caso estacionario, cuando las funciones no dependan explícitamente del tiempo pues entonces la ecuación anterior se reduce a la ecuación de Laplace bidimensional. La función $f$ puede ser descrita por la parte real (o imaginaria) de una función analítica. Pueden referirse a ondas de sonido bidimensionales, ondas de temperatura (ondas de transmisión de calor), etc.

La mecánica de fluidos satisface la ecuación de continuidad

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0,$$

siendo $\rho$ la densidad del medio y $\boldsymbol{v}$ el campo de velocidad del fluido. Si suponemos el fluido incompresible, $d\rho/dt = 0$ y si además el régimen del mismo es irrotacional, $\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = 0$, con lo que el campo de velocidad se puede derivar de una función potencial, $\boldsymbol{v} = \nabla\Phi$, resulta entonces que $\nabla^2\Phi = 0$. Ejemplos bidimensionales de mecánica de fluidos en régimen irrotacional quedarán descritos por la parte real (o imaginaria) de una función analítica cuya parte imaginaria (o real) describirá las líneas del campo de velocidad, esto es, las líneas de corriente.

**Corriente alterna**

Cuando en un circuito circula una corriente alterna $I(t) = I_0 \cos\omega t$, la diferencia de potencial entre los diferentes elementos del circuito depende de su naturaleza. Si se trata de una resistencia Óhmica $R$, la diferencia de potencial entre sus extremos es $V(t) = I(t)R = I_0 R\cos\omega t = V_0 \cos\omega t$, con $V_0 = I_0 R$. Si es un condensador de capacidad $C$, entonces $V(t) = (I_0/C\omega)\cos(\omega t - \pi/2)$, mientras que si es un dispositivo con un coeficiente de autoindución magnética $L$, $V(t) = (I_0 L\omega)\cos(\omega t + \pi/2)$. Existe por lo tanto una relación lineal entre la diferencia de potencial y la intensidad y a veces un desfase temporal. Podemos representar tanto la intensidad $I(t)$, la diferencia de potencial entre los diferentes puntos $V(t)$, como los atributos de los diferentes dispositivos mediantes variables complejas, de tal manera que la parte de la $I(t)$ y de la $V(t)$ que medimos sea su componente real. Así, hacemos la sustitución:

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t}, \quad R \to R, \quad C \to X_C = \frac{-i}{C\omega}, \quad L \to X_L = iL\omega, \quad \mathrm{Re}\, I(t) = I_0 \cos\omega t,$$

de tal manera que cada dispositivo tiene ahora una **impedancia** compleja $Z$ que se obtiene de las anteriores asignaciones mediante las reglas habituales de la teoría lineal de circuitos, en que impedancias en serie se suman y para acoplamientos en paralelo, el inverso de la impedancia total es la suma de los inversos de las correspondientes impedancias. El cálculo de la diferencia de potencial sigue las reglas de los dispositivos Óhmicos $V(t) = I(t)Z$. Por lo tanto la intensidad $I(t)$ viene caracterizada por un complejo de módulo $I_0$ que rota con velocidad constante $\omega$ y por lo tanto tiene una fase $\omega t$, de tal manera que $\mathrm{Re}\, I(t)$ representa la intensidad real en este instante $t$. La impedancia $Z = R + iX$, es un complejo de módulo $\sqrt{R^2 + X^2}$ y de fase $\alpha$, tal que $\tan\alpha = X/R$. Esto hace que

$$V(t) = I(t)Z = I_0\sqrt{R^2 + X^2}e^{i(\omega t + \alpha)}, \qquad \mathrm{Re}\, V(t) = V_0 \cos(\omega t + \alpha), \quad V_0 = I_0\sqrt{R^2 + X^2}.$$

## Problemas

**7.1** Encontrar en el plano complejo y en coordenadas polares $(r,\theta)$ una función armónica que sea independiente de $r$. Buscar la solución particular que sobre la recta real toma los valores $u(x,0)=1$, para $x>0$ y $u(x,0)=0$, para $x<0$.

**7.2** Aplicando la resolución del problema de Dirichlet en el semiplano superior, encontrar una función armónica en esta región $\mathrm{Im}(z)>0$ y que sobre la recta real toma los valores $u(x,0)=1$, para $x>0$ y $u(x,0)=0$, para $x>0$.

**7.3** Demostrar que si $F(x,y)$ es una función continua y derivable de las variables $x,y$, si hacemos el cambio de variables del plano mediante una función analítica $w=u+iv=f(z)\equiv f(x+iy)$, entonces se tiene:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2}=|f'(z)|^2\left(\frac{\partial^2 F(x(u,v),y(u,v))}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 F(x(u,v),y(u,v))}{\partial v^2}\right).$$

y si $F$ es una función armónica en las variables $x,y$ también lo es en las variables $u,v$ si es que la transformación $f(z)$ cumple $f'(z)\neq 0$, es decir es una transformación conforme.

**7.4** Como caso especial del problema de Dirichlet en el plano, obtener la siguiente expresión para una función armónica acotada $F(x,y)$ en el primer cuadrante

$$F(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{(t-x)^2+y^2}-\frac{1}{(t+x)^2+y^2}\right]h(t)dt,\quad y>0,x\geq 0,$$

y que satisface las condiciones de contorno $F(0,y)=0$ para $y>0$ y $F(x,+0)=h(x)$, $x>0$, pudiendo ser $h(x)$ una función continua a trozos.

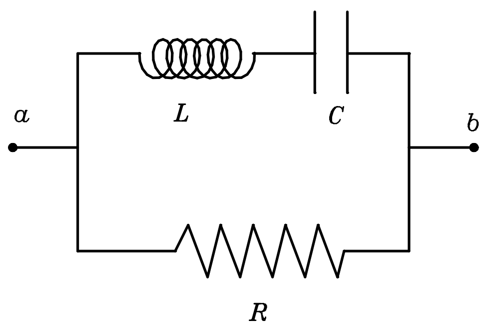
**7.5** Encontrar el potencial de un campo vectorial irrotacional que posee dos fuentes (un manantial y un sumidero) en los puntos $z=-a$ y $z=a$ y de la misma intensidad. Determinar asímismo las líneas del campo. (Nota: la divergencia del campo es nula salvo en los puntos $\pm a$ que es de la misma intensidad $\mp 2\pi k$.)[Sol. $V(z)=\log((z+a)/(z-a))$.]

**7.6** En un fluido bidimensional irrotacional, se denomina **potencial complejo de velocidad** a la función compleja $\Omega(z)=U+iV$ cuya parte real $U$ es el potencial de velocidad, es decir $\boldsymbol{v}=\nabla U$ y su parte imaginaria $V=$cte. representa a las líneas de corriente. Si el contorno de un obstáculo $C$ es una de las líneas de corriente, demostrar que la fuerza que la corriente hace sobre un obstáculo pequeño $\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}$ escrita como el complejo $F=F_x+iF_y$, verifica:

$$\bar{F}=F_x-iF_y=\frac{i\rho}{2}\oint_C\left(\frac{d\Omega(z)}{dz}\right)^2dz,$$

siendo $\rho$ la densidad constante del fluido. (Nota: El teorema de Bernoulli establece que a lo largo de una línea de corriente la presión $p$, la velocidad $v$ y la altura $y$ verifican $p+\rho v^2/2+\rho gy=$cte. Suponer que la variación de $\rho gy$ es despreciable para obstáculos pequeños.)

**7.7** En el circuito de la figura, compuesto por una bobina de coeficiente de autoinducción $L$, un condensador de capacidad $C$ y una resistencia Óhmica de valor $R$, se aplica una diferencia de potencial $V(t)=V_0\cos\omega t$ entre los puntos $a$ y $b$. Se pide:
(a) Determinar la impedancia del circuito entre los puntos $a$ y $b$.
(b) Determinar qué frecuencia $\omega$ debe tener la tensión aplicada para que el circuito no presente ninguna impedancia.
(c) ¿qué impedancia tendrá dicho circuito si la tensión aplicada es de frecuencia doble $2\omega$?
(d) Determinar en este segundo caso la corriente que circula por la resistencia.
(e) ¿qué impedancia tendrá dicho circuito si la tensión aplicada es una tensión continua $V_0$? ¿Qué corriente circulará en este caso por las dos ramas?


a
L
C
b
R

# Capítulo 8

# Curvas en dos y tres dimensiones

Una curva en $\mathbb{R}^3$ se expresa en forma **paramétrica** como

$$\boldsymbol{r}(t) = x_1(t)\boldsymbol{e}_1 + x_2(t)\boldsymbol{e}_2 + x_3(t)\boldsymbol{e}_3 \equiv x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k},$$

siendo $\boldsymbol{e}_i$ tres vectores unidad ortogonales y las funciones continuas $x_i(t)$ las coordenadas de cada punto expresadas en términos del parámetro arbitrario $t$. La curva se denomina **regular** si existe vector tangente $d\boldsymbol{r}/dt = x_1'(t)\boldsymbol{e}_1 + x_2'(t)\boldsymbol{e}_2 + x_3'(t)\boldsymbol{e}_3$ en cada punto. Los puntos en los que no exista vector tangente se denominan **singulares**. Si alguna de las funciones $x_i(t)$, por ejemplo la $x(t)$ es tal que su derivada $x'(t) \neq 0$ para todo $t$, entonces podemos expresar $t = t(x)$ y sustituir en las otras dos y obtener las ecuaciones

$$y = f(x), \quad z = g(x)$$

que son las ecuaciones **cartesianas** de la curva. Otra manera de expresar la ecuación de una curva, cuando la sustitución anterior no es tan evidente, puede ser de forma **implícita**, mediante dos funciones

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0,$$

que corresponde formalmente al corte de dos superficies de $\mathbb{R}^3$.
La longitud del arco de curva se calcula mediante

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2}dx = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt,$$

Si la curva es regular entonces $ds/dt \neq 0$ y podemos usar como parámetro la longitud del arco $s$. Cuando la curva se expresa de forma paramétrica en términos de la longitud de arco $s$, se dice que es la descripción **canónica** de la curva. En este caso $\boldsymbol{t}(s) = d\boldsymbol{r}(s)/ds \equiv \dot{\boldsymbol{r}}(s)$, es un vector unidad tangente a la curva. Cuando usamos este parámetro, las derivadas se representan mediante un punto superpuesto, en vez de mediante una tilde. Su vector derivado será ortogonal a él y lo definimos mediante $\dot{\boldsymbol{t}}(s) \equiv \kappa(s)\boldsymbol{n}(s)$, con $\boldsymbol{n}(s)$ el vector unidad **normal principal** y donde la función $\kappa(s)$ se denomina la **curvatura** de la curva en ese punto. A la función $R(s) = 1/|\kappa(s)|$ se le llama **radio de curvatura**. A la dirección del espacio que define el vector $\boldsymbol{n}$ en ese punto, se le denomina dirección **normal principal** a la curva.

Si en cada punto de la curva regular se define $\boldsymbol{b}(s) = \boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{n}(s)$, que resulta ser otro vector unidad perpendicular a los dos anteriores, entonces en cada punto de la curva es posible definir un sistema de tres vectores unidad ortogonales con la misma orientación relativa que la de los ejes de coordenadas. Se les denomina **triedro móvil** y los vectores reciben el nombre de vector unidad **tangente**, **normal** y **binormal**, respectivamente.

La curvatura de una curva en un punto es el cambio por unidad de longitud del ángulo que forma la recta tangente con una dirección fija. En dos dimensiones, si llamamos $\theta$ al ángulo que forma el vector tangente con el eje $OX$, resulta que

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds}, \quad \theta = \arctan y'(x), \qquad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{y''(x)}{(1 + y'(x)^2)^{3/2}} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

Las **ecuaciones fundamentales** de la teoría de curvas son las ecuaciones dinámicas del triedro móvil $\boldsymbol{t}(s)$, $\boldsymbol{n}(s)$, $\boldsymbol{b}(s)$, que se denominan ecuaciones de **Frenet-Serret**:

$$\dot{\boldsymbol{t}}(s) = \kappa(s)\boldsymbol{n}(s), \quad \dot{\boldsymbol{n}}(s) = -\kappa(s)\boldsymbol{t}(s) + \tau(s)\boldsymbol{b}(s), \quad \dot{\boldsymbol{b}}(s) = -\tau(s)\boldsymbol{n}(s).$$

Admiten la representación

$$\dot{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{t}, \quad \dot{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{n}, \quad \dot{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{b},$$

donde el vector $\boldsymbol{\omega} = \tau\boldsymbol{t} + \kappa\boldsymbol{b}$, llamado vector de Darboux, representa la velocidad angular instantánea (con respecto al parámetro $s$) expresada en el sistema de referencia del triedro instantáneo. Así como $\kappa$ mide el cambio de orientación del vector tangente, la magnitud $\tau(s)$ que se denomina la **torsión** de la curva, corresponde al cambio de orientación por unidad de longitud, del vector binormal $\boldsymbol{b}$.

$$|\kappa| = \frac{|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^3}, \quad \tau = \frac{(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'') \cdot \boldsymbol{r}'''}{|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''|^2}.$$

## Ecuaciones intrínsecas de una curva

El conocimiento de la curvatura $\kappa(s)$ y de la torsión $\tau(s)$ determinan la curva salvo una rotación y una traslación arbitrarias. Si el sistema de ecuaciones de Frenet-Serret es integrable, calculado el vector $\boldsymbol{t}(s) = d\boldsymbol{r}/ds$ e integrado de nuevo nos dará la ecuación de la curva. En el caso de curvas planas $\tau(s) = 0$, es siempre posible integrar la ecuación intrínseca $\kappa(s)$ y obtener la ecuación de la curva $\boldsymbol{r}(s)$. En el caso tridimensional se puede llevar el sistema a una ecuación de Ricatti. Una solución de la curva plana es integrar primero $d\theta/ds = \kappa(s)$ y obtener $\theta(s)$ y así usar como parámetro el ángulo que forma el vector tangente y de esta forma

$$\boldsymbol{r}(\theta) = \int \boldsymbol{t}(\theta)ds = \int (\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\boldsymbol{e}_2)\frac{ds}{d\theta}d\theta + \boldsymbol{c} = \int (\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\boldsymbol{e}_2)\frac{1}{\kappa(\theta)}d\theta + \boldsymbol{c},$$

con $\boldsymbol{c}$ un vector constante, que representa una traslación. La rotación arbitraria resulta de la constante de integración al obtener la expresión de $\theta(s)$.

## Movimiento de una partícula

Una partícula que se mueve en el espacio describe una curva $\boldsymbol{r}(t)$, cuya ecuación está escrita en forma paramétrica, siendo el tiempo $t$ el parámetro utilizado. De esta manera, definimos las siguientes funciones:

a) vector de **posición**, $\boldsymbol{r}(t)$,

b) **velocidad**, $\boldsymbol{r}'(t) = d\boldsymbol{r}(t)/dt$,

c) **aceleración**, $\boldsymbol{r}''(t) = d^2\boldsymbol{r}(t)/dt^2$,

Como asociado a cada punto de la curva existen tres vectores unidad (el triedro intrínseco) $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{b}$, en términos de los cuales podemos expresar los anteriores vectores asociados a la partícula. Así, si llamamos $v(t) = |\boldsymbol{r}'(t)| = ds/dt$ al valor absoluto de la velocidad, resulta

$$\boldsymbol{r}'(t) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = v(t)\dot{\boldsymbol{r}}(t) \equiv v(t)\boldsymbol{t}(t).$$

La aceleración

$$\boldsymbol{r}''(t) = \frac{dv(t)}{dt}\boldsymbol{t}(t) + v(t)^2\dot{\boldsymbol{t}}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\boldsymbol{t}(t) + v(t)^2\kappa(t)\boldsymbol{n}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\boldsymbol{t}(t) + \frac{v(t)^2}{R(t)}\boldsymbol{n}(t).$$

La componente tangencial de la aceleración $a_T = dv/dt$ y como el radio de curvatura $R(t) = 1/\kappa(t)$, la componente normal de la aceleración vale $a_N = v^2/R$.

## Curvas asociadas a otras curvas

Se denomina **envolvente** de una familia de curvas a una curva no perteneciente a la familia tal que en cada uno de sus puntos es tangente a una curva de la familia. Sea $\boldsymbol{r}(t, \lambda)$ la familia de curvas tal que para cada valor de $\lambda$ se singulariza una curva de la familia. Si la familia viene dada de la forma paramétrica anterior entonces la envolvente se calcula eliminando $\lambda$ entre la ecuación dada y la que se obtiene de anular el jacobiano $\partial(x, y)/\partial(t, \lambda) = 0$. Esto implica que es posible obtener para cada curva una relación $\lambda = \lambda(t)$, con lo que la envolvente es la curva $\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{r}(t, \lambda(t))$. Si la familia viene expresada en la forma $F(x, y, \lambda) = 0$, entonces la envolvente se obtiene de eliminar $\lambda$ entre esta ecuación y la $\partial F(x, y, \lambda)/\partial\lambda = 0$, dado que la curva $F(x, y, \lambda) = 0$ con $\lambda$ fijo, y la $F(x, y, \lambda+\Delta\lambda) = 0$ poseen en común los puntos $(x, y)$ por donde pasa la envolvente luego $(F(x, y, \lambda+\Delta\lambda) - F(x, y, \lambda))/\Delta\lambda = 0$.

Recibe el nombre de **evoluta** de una curva plana a la curva que definen sus centros de curvatura. Si $\boldsymbol{r}(t)$ es la curva dada, su evoluta $\boldsymbol{r}^*(t) = \boldsymbol{r}(t) + R(t)\boldsymbol{n}(t)$, siendo $\boldsymbol{n}(t)$ el vector normal de la curva $\boldsymbol{r}(t)$ y $R(t)$ el correspondiente radio de curvatura en cada punto. Resulta que la evoluta es también la curva envolvente de la familia de rectas normales a la curva dada, que recibe el nombre de **evolvente** de su evoluta. Las curvas evolventes se construyen desenrollando un hilo inextensible sobre la evoluta, de tal manera que variando la longitud del hilo tenemos distintas evolventes con una misma evoluta.

La circunferencia tangente a la curva en un punto y que tiene la misma curvatura que ésta, recibe el nombre de **circunferencia osculatriz**. Si el centro de curvatura es el punto de coordenadas $(c_1, c_2)$, la ecuación de esta circunferencia es $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = R^2$, que al tener con la curva dada en el punto $x$ el mismo valor de la $y(x)$, $y'(x)$ y de la $y''(x)$, es decir un contacto de tercer grado, resulta que las coordenadas del centro de curvatura y del radio de curvatura, son

$$c_1 = x - \frac{1 + y'(x)^2}{y''(x)} y'(x), \quad c_2 = y(x) + \frac{1 + y'(x)^2}{y''(x)}, \quad R = \frac{(1 + y'(x)^2)^{3/2}}{y''(x)} = \frac{1}{\kappa}.$$

o en paramétricas

$$c_1 = x(t) - \frac{(x'(t)^2 + y'(t)^2)y'(t)}{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}, \; c_2 = y(t) + \frac{(x'(t)^2 + y'(t)^2)x'(t)}{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}, \; R = \frac{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}.$$

La **recta tangente** a una curva dada $\boldsymbol{r}(t)$ en un punto $t_0$, y parametriza por el parámetro $\lambda$, viene dada por

$$\boldsymbol{r}^*(\lambda, t_0) = \boldsymbol{r}(t_0) + \lambda\boldsymbol{t}(t_0)$$

El **plano osculador** a una curva dada $\boldsymbol{r}(t)$ en un punto $t_0$ es el que contiene a los vectores $\boldsymbol{t}$ y $\boldsymbol{n}$, contiene a la circunferencia osculatriz, es ortogonal a $\boldsymbol{b}$ y si $\boldsymbol{p} \equiv (X, Y, Z)$ es un punto cualquiera de este plano, su ecuación cartesiana vendrá dada por

$$(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}(t_0)) \cdot \boldsymbol{b}(t_0) = 0.$$

El **plano normal** a una curva dada $\boldsymbol{r}(t)$ en un punto $t_0$ es el que contiene a los vectores $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{b}$, y por lo tanto es ortogonal a $\boldsymbol{t}$ y si $\boldsymbol{p}$ es un punto cualquiera de este plano, su ecuación vendrá dada por

$$(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}(t_0)) \cdot \boldsymbol{t}(t_0) = 0.$$

El **plano rectificante** a una curva dada $\boldsymbol{r}(t)$ en un punto $t_0$ es el que contiene a los vectores $\boldsymbol{t}$ y $\boldsymbol{b}$, y por lo tanto es ortogonal a $\boldsymbol{n}$ y si $\boldsymbol{p}$ es un punto cualquiera de este plano, su ecuación vendrá dada por

$$(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}(t_0)) \cdot \boldsymbol{n}(t_0) = 0.$$

## Representación canónica de una curva

Se trata de ver cómo se comporta una curva en las proximidades de un punto, es decir para valores pequeños del parámetro. Como el punto es arbitrario tomamos $s = 0$ y desarrollamos $\boldsymbol{r}(s)$ alrededor de ese punto tomando como ejes coordenados $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{b}$. Entonces,

$$\boldsymbol{r}(s) = \boldsymbol{r}(0) + \dot{\boldsymbol{r}}(0)s + \ddot{\boldsymbol{r}}(0)\frac{s^2}{2!} + \dddot{\boldsymbol{r}}(0)\frac{s^3}{3!} + \cdots,$$

que como $\ddot{\boldsymbol{r}}(s) = \kappa\boldsymbol{n}$, $\dddot{\boldsymbol{r}}(s) = \dot{\kappa}\boldsymbol{n} + \kappa\dot{\boldsymbol{n}} = -\kappa^2\boldsymbol{t} + \dot{\kappa}\boldsymbol{n} + \kappa\tau\boldsymbol{b}$,

$$\boldsymbol{r}(0) = 0, \quad \dot{\boldsymbol{r}}(0) = \boldsymbol{e}_1, \quad \ddot{\boldsymbol{r}}(0) = \kappa(0)\boldsymbol{e}_2, \quad \dddot{\boldsymbol{r}}(0) = -\kappa^2(0)\boldsymbol{e}_1 + \dot{\kappa}(0)\boldsymbol{e}_2 + \kappa(0)\tau(0)\boldsymbol{e}_3,$$

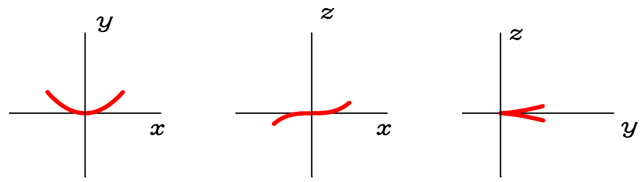
es decir

$$x(s) = s - \frac{1}{6}\kappa(0)^2 s^3 + o(s^3), \quad y(s) = \frac{1}{2}\kappa(0)s^2 + \frac{1}{6}\dot{\kappa}(0)s^3 + o(s^3), \quad z(s) = \frac{1}{6}\kappa(0)\tau(0)s^3 + o(s^3).$$

A orden más bajo, la forma de una curva en el entorno de cualquier punto, tiene por ecuaciones paramétricas

$$x = s, \quad y = \frac{1}{2}\kappa s^2, \quad z = \frac{1}{6}\kappa\tau s^3,$$

por lo que para valores pequeños de $s$ la proyección de la curva sobre el plano osculador $XY$ es la parábola $y = \kappa x^2/2$, sobre el plano rectificante $XZ$ la cúbica $z = \kappa\tau x^3/6$ y finalmente sobre el plano normal $YZ$ es la **cisoide**, $z^2 - 2\tau^2 y^3/9\kappa = 0$.



## Problemas

**8.1** Demostrar que si $\boldsymbol{u}(t)$ y $\boldsymbol{v}(t)$ son funciones vectoriales de la variable real $t$, se cumple:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\times\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt},$$

$$\boldsymbol{u}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = |\boldsymbol{u}|\,\frac{d|\boldsymbol{u}|}{dt} = \frac{1}{2}\frac{du^2}{dt}.$$

**8.2** Verificar que la **cardioide** $x(\theta) = \cos\theta(2\cos\theta + 1)$, $y(\theta) = \sin\theta(2\cos\theta + 1)$, $0 \le \theta \le 2\pi$ es una curva regular. ¿Posee puntos múltiples? Calcular su curvatura.

**8.3** Hallar la longitud de un arco de **epicicloide** como función del parámetro $\theta$ a lo largo de la curva. Calcular su curvatura.

$$x(\theta) = (r_0 + r)\cos\theta - r\cos\left(\frac{r_0 + r}{r}\theta\right), \quad y(\theta) = (r_0 + r)\sin\theta - r\sin\left(\frac{r_0 + r}{r}\theta\right).$$

**8.4** La **asteroide** $x(\theta) = \cos^3(\theta)$, $y(\theta) = \sin^3(\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$ ¿es una curva regular? Calcular su curvatura.

**8.5** ¿De qué orden es el contacto en el punto $(0,1)$ entre la catenaria $y = \cosh x$ y la circunferencia $x^2 + (y-2)^2 = 1$? Comparar esta circunferencia con su circunferencia osculatriz en ese punto.

**8.6** Parametrizar la **espiral logarítmica** $\boldsymbol{r}(t) = (e^t\cos t)\boldsymbol{e}_1 + (e^t\sin t)\boldsymbol{e}_2$ en términos de la longitud del arco.

**8.7** Demostrar que si una curva plana viene dada en las formas (1) implícita $F(x,y) = 0$, (2) explícita $y = f(x)$, (3) paramétrica $x = x(t)$, $y = y(t)$, y (4) en coordenadas polares $r = r(\theta)$, la expresión de la curvatura es, respectivamente:

$$\kappa = \frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}{(F'^2_x + F'^2_y)^{3/2}}, \quad \kappa = \frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}}, \quad \kappa = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}, \quad \kappa = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}.$$

**8.8** Calcular la ecuación de la recta tangente, recta normal y **circunferencia osculatriz** a la elipse $\boldsymbol{r}(\theta) = a\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + b\sin\theta\boldsymbol{e}_2$ en el punto $\theta = \pi/6$.

**8.9** Calcular la **envolvente** de un segmento móvil $AB$ de longitud constante $l$ cuyos extremos se apoyan en los ejes coordenados. [Sol. $x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$.]

**8.10** Dada la espiral logarítmica en coordenadas polares $r = ca^\theta$, ¿qué condición debe verificar el parámetro $a$ para que la evoluta coincida con la propia curva? [Sol. $\ln a = a^{\pi/2}$.]

**8.11** Calcular la **evoluta** de las siguientes curvas:
a) Parábola $y^2 = 4px$,
b) Elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$,
c) Cicloide $\boldsymbol{r}(\theta) = a(\theta - \sin\theta)\boldsymbol{e}_1 + a(1 - \cos\theta)\boldsymbol{e}_2$.

**8.12** Calcular la envolvente de la familia de circunferencias $(x - 2a)^2 + y^2 = a^2$. [Sol. Las rectas $y = \pm x/\sqrt{3}$.]

**8.13** Calcular la curvatura de la **cisoide** $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3$, en cualquier punto. ¿Posee puntos singulares? [Sol. $\kappa = 6/t(4 + 9t^2)^{3/2}$. El $t = 0$ es un punto singular.]

**8.14** Hallar las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal a la curva $\boldsymbol{r}(t) = (1+t)\boldsymbol{e}_1 - t^2\boldsymbol{e}_2 + (1 + t^3)\boldsymbol{e}_3$, en $t = 1$. Determinar asímismo la curvatura y torsión en dicho punto.

**8.15** Encontrar la curvatura de la curva $y = x^4$ en el punto $(0, 0)$. [Sol. 0]

**8.16** Demostrar que si tenemos dada la ecuación de una curva $\boldsymbol{r}(s)$ cuyo parámetro es la longitud del arco, y tal que $\boldsymbol{r}^{(n)} = d^n\boldsymbol{r}/ds^n$, entonces se cumple:

$$\boldsymbol{r}^{(1)} \cdot \boldsymbol{r}^{(2)} = 0, \quad \boldsymbol{r}^{(2)} \cdot \boldsymbol{r}^{(2)} = \kappa^2, \quad \boldsymbol{r}^{(1)} \cdot \boldsymbol{r}^{(3)} = -\kappa^2, \quad \boldsymbol{r}^{(2)} \cdot \boldsymbol{r}^{(3)} = \kappa\dot{\kappa}, \quad \boldsymbol{r}^{(3)} \cdot \boldsymbol{r}^{(3)} = \kappa^4 + \kappa^2\tau^2 + \dot{\kappa}^2.$$

**8.17** Demostrar que si una curva no posee torsión, entonces se trata de una curva plana.

**8.18** Si por la notación $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ queremos representar el valor de un determinante $3 \times 3$ cuyas filas (o columnas) son las componentes de los 3 vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$, entonces demostrar que $\kappa^2\tau = [\dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}, \dddot{\boldsymbol{r}}]$.

**8.19** Definir el triedro intrínseco a la curva $\boldsymbol{r}(t) = (3t - t^3)\boldsymbol{e}_1 + 3t^2\boldsymbol{e}_2 + (3t + t^3)\boldsymbol{e}_3$, así como las ecuaciones de Frenet-Serret del mismo.

**8.20** Probar que las ecuaciones de Frenet-Serret se pueden escribir como

$$\dot{\boldsymbol{v}}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_1, \quad \dot{\boldsymbol{v}}_2 = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_2, \quad \dot{\boldsymbol{v}}_3 = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_3,$$

para un cierto vector $\boldsymbol{\omega}$, llamado vector de Darboux, que representa la velocidad angular instantánea del punto. Determinarlo.

**8.21** Determinar la curva de ecuaciones intrínsecas $k(s) = (1/2as)^{1/2}$, $\tau(s) = 0$, $a > 0$, $s > 0$.

**8.22** Se define una **hélice** como aquella curva cuyo vector tangente forma un ángulo constante con una dirección fija del espacio. Demostrar que para toda hélice la relación $\kappa/\tau =$ constante.

**8.23** Determinar que la curva de ecuaciones intrínsecas $k(s) = (1/s)$, $\tau(s) = 0$, $s > 0$, es una espiral logarítmica.

**8.24** Demostrar que los vectores tangentes a la curva $\boldsymbol{r}(t) = at\boldsymbol{e}_1 + bt^2\boldsymbol{e}_2 + t^3\boldsymbol{e}_3$, siendo $2b^2 = 3a$, forman un ángulo constante con el vector $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$.¿Qué ángulo?

**8.25** Demostrar que las dos líneas siguientes

$$\text{(a)} \quad x^2 = 3y,\ 2xy = 9z, \qquad \text{(b)} \quad x = 2t,\ y = \ln t,\ z = t^2,$$

son hélices. En el caso (b) probar que además la hélice está sobre un cilindro cuyas generatrices son paralelas a un vector de cosenos directores proporcionales a $(0, 1, 1)$.

**8.26** ¿Qué condiciones debe satisfacer la curva $x = at$, $y = bt^2$, $z = ct^3$, para que sea una hélice generalizada?

**8.27** Conocida la curvatura $\kappa(s)$ y la torsión $\tau(s)$ de una hélice de sección circular, encontrar sus ecuaciones paramétricas

**8.28** Demostrar que si una curva de torsión $\tau$ distinta de cero está sobre una esfera de radio $a$ entonces se cumple

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\right)^2 = a^2.$$

**8.29** Como la torsión se obtiene a partir del producto $(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'') \cdot \boldsymbol{r}'''$, demostrar que una partícula puntual sin estructura, sometida a fuerzas centrales, sigue necesariamente una trayectoria de torsión nula, es decir, una trayectoria plana. ¿Cómo es la trayectoria si la fuerza depende también de la velocidad? (Suponer un término de la forma $h(r)\boldsymbol{v}$ en la dirección de $\boldsymbol{v}$ y en otro caso otro término perpendicular a $\boldsymbol{v}$ de la forma $\boldsymbol{k}(r) \times \boldsymbol{v}$).

**8.30** Encontrar la ecuación diferencial más general que satisface una curva en el espacio tridimensional.¿Y en dos dimensiones? Encontrar las curvas planas de de curvatura constante, $\kappa \neq 0$.

**8.31** Demostrar que si una curva en el espacio tridimensional viene expresada en forma paramétrica $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, la expresión de la curvatura y de la torsión es

$$\kappa = \frac{\sqrt{\boldsymbol{r}'^2\boldsymbol{r}''^2 - (\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}'')^2}}{|\boldsymbol{r}'|^3} = \frac{1}{\rho},$$

$$\tau = \frac{\rho^2}{|\boldsymbol{r}'|^6}(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'') \cdot \boldsymbol{r}'''.$$

**8.32** Dada la curva en el espacio tridimensional

$$\boldsymbol{r}(t) = \cos t\, \boldsymbol{e}_1 + \sin t\, \boldsymbol{e}_2 + \frac{t^2}{2}\, \boldsymbol{e}_3,$$

se pide:
1) Determinar la ecuación cartesiana de la curva.
2) Determinar los vectores unidad tangente, normal principal y binormal en cualquier punto de la curva. ¿Están siempre definidos?
3) Calcular la curvatura y la torsión en cualquier punto. ¿Dónde es la curvatura máxima? ¿Dónde se anula la torsión? ¿Cuánto vale el radio de la circunferencia osculatriz en el punto en que se anula la torsión?
4) Encontrar la ecuación paramétrica y cartesiana de la recta tangente a la curva en el punto $t = \pi/2$.
5) Expresar la ecuación cartesiana de la familia de planos normales a la curva. [Examen Junio 2002]

**8.33** Encontrar la curvatura de la elipse $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t$, para todo $t \in [0, 2\pi]$, y $a \neq b$. Encontrar los puntos en los que la curvatura es máxima o mínima. ¿Cuánto vale la curvatura máxima? [Examen Septiembre 2002]

**8.34** Demostrar que si la ecuación de una elipse se escribe en forma polar $r = p/(1+e\cos\theta)$ entonces la curvatura en los ábsides (vértices de curvatura máxima) vale $\kappa = 1/p$.

**8.35** Encontrar las ecuaciones intrínsecas de las curvas:

$$(a) \quad x(t) = a\cosh t, \quad y(t) = a\sinh t, \quad z(t) = at,$$

$$(b) \quad x(t) = ct, \quad y(t) = \sqrt{2c}\ln t, \quad z(t) = c/t,$$

**8.36** Dada la curva en el espacio tridimensional

$$\boldsymbol{r}(t) = 4\cos t\, \boldsymbol{e}_1 + 3t\, \boldsymbol{e}_2 - 4\sin t\, \boldsymbol{e}_3,$$

se pide:

1. Encontrar la ecuación cartesiana de la curva.
2. Determinar los vectores unidad tangente, normal principal y binormal en cualquier punto de la curva. ¿Cuáles son estos vectores en el punto $t = \pi$?
3. Determinar el plano osculador en el punto $t = \pi/2$.
4. Determinar la longitud de la curva entre los puntos $t_1 = \pi/2$ y $t_2 = 5\pi/2$.
5. Calcular la curvatura y la torsión en cualquier punto.
6. Determinar la ecuación paramétrica de la superficie construida a partir de la curva y sus rectas normales principales.

[Examen Junio 2003]

**8.37** Sea $\boldsymbol{r}(t)$ la curva parametrizada $\boldsymbol{r}(t) = \frac{4}{5}\cos t\boldsymbol{i} + (1-\sin t)\boldsymbol{j} - \frac{3}{5}\cos t\boldsymbol{k}$.
(a) Calcular la tangente, normal, binormal, la curvatura y la torsión en cada punto.
(b) ¿Es la curva plana?. En caso afirmativo, hallar la ecuación del plano que la contiene.
(c) ¿De qué curva se trata?

[Examen Junio 2004]

**8.38** La curva plana

$$\boldsymbol{r}(t) \equiv t\boldsymbol{e}_1 + \cosh t\boldsymbol{e}_2,$$

recibe el nombre de **catenaria**, pues corresponde a la figura que adopta una cadena o hilo, colgada de sus extremos y bajo la acción del campo gravitatorio. Calcular:
(a) El vector unidad tangente y el vector normal principal.
(b) Su curvatura.
(c) ¿Dónde es su curvatura máxima?
(d) Su evoluta.

[Examen Septiembre 2004]

**8.39** Dada la curva en $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{r}(t) = (1+t)\boldsymbol{e}_1 + (1 - \frac{1}{3}t^3)\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}t^2\boldsymbol{e}_3$$

Determinar:
(a) Los vectores unidad tangente, normal pricipal y binormal en cualquier punto de la curva.
(b) Calcular la curvatura y la torsión en el punto $t = 2$.
(c) Calcular la recta tangente en el punto $t = 3$ y determinar el punto de corte de esta recta con el plano $XOY$.
(d) Calcular la longitud de la curva desde el punto que está situado en el plano $XOY$ hasta el punto en que la curva corta al plano $z = \sqrt{8}$.
(e) Encontrar la ecuación cartesiana de la curva.
(f) Encontrar la ecuación del plano osculador en el punto $t = 0$.[Examen junio 2006]

**8.40** Dada la curva en $\mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{r}(t) = (3t - t^3)\boldsymbol{e}_1 + 3t^2\boldsymbol{e}_2 + (3t + t^3)\boldsymbol{e}_3,$$

se pide:
(a) Calcular los vectores unidad del triedro de Frenet-Serret en cada punto.
(b) Calcular su curvatura y torsión en cada punto.
(c) Calcular su evoluta (La curva de sus centros de curvatura).
(d) El plano osculador en el punto $t = 2$.[Examen Septiembre 2006]

**8.41** Dada la curva en $\mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{r}(t) = (3t - t^3)\boldsymbol{e}_1 + 3t^2\boldsymbol{e}_2 + (3t + t^3)\boldsymbol{e}_3,$$

determinar:
(a) Los vectores unidad del triedro de Frenet-Serret en cada punto.
(b) La curvatura y la torsión en cada punto.
(c) La ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto $t = 3$.
(d) Los puntos de corte con el plano $x + y + z = 0$.
(e) La longitud de la curva entre esos puntos de corte.
(f) El plano normal en el punto $t = 1$.

[Examen Junio 2007]

# Capítulo 9

# Superficies en tres dimensiones

Una superficie se dice que es **regular** si posee plano tangente en cada punto. Viene caracterizada de forma implícita por una función derivable $F(x, y, z) = 0$, de tal manera que si podemos despejar la variable $z = f(x, y)$ se nos define la ecuación cartesiana de la superficie. De forma paramétrica viene caracterizada por la función vectorial

$$\boldsymbol{r}(u, v) = x_1(u, v)\boldsymbol{e}_1 + x_2(u, v)\boldsymbol{e}_2 + x_3(u, v)\boldsymbol{e}_3 \equiv x(u, v)\boldsymbol{i} + y(u, v)\boldsymbol{j} + z(u, v)\boldsymbol{k},$$

dependiente de dos parámetros reales $u$ y $v$. La eliminación de los parámetros $u$ y $v$ entre las tres funciones $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ y $z = z(u, v)$ nos dará la ecuación cartesiana. Si llamamos $\boldsymbol{r}_u \equiv \partial\boldsymbol{r}/\partial u$, $\boldsymbol{r}_v \equiv \partial\boldsymbol{r}/\partial v$, en cada punto de la superficie definen un vector tangente a una curva ($v$ =cte. y $u$ =cte., respectivamente) contenida en la superficie. La existencia del plano tangente implica que $\boldsymbol{r}_u$ y $\boldsymbol{r}_v$ no son colineales y que entre ambos definen el plano tangente cuya normal tiene la dirección del vector $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$. Definido el vector unitario normal a la superficie en cada punto $\boldsymbol{n}(u, v) = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v/|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|$, el plano tangente a la superficie en un cierto punto $\boldsymbol{r}_0$, viene dado por el vector de posición $\boldsymbol{T} \equiv (X, Y, Z)$, tal que $\boldsymbol{n}_0 \cdot (\boldsymbol{T} - \boldsymbol{r}_0) = 0$. La recta normal a la superficie en ese punto por el vector $\boldsymbol{N}(\lambda) = \boldsymbol{r}_0 + \lambda\boldsymbol{n}_0$.

Las rectas tangentes a una curva $C$ generan una superficie que se denomina **superficie tangente** de $C$. Como es una superficie construida a partir de rectas, se denomina superficie **reglada**. Una curva de esta superficie que corte perpendicularmente a las rectas tangentes recibe el nombre de **involuta** de $C$. Otras superficies regladas son las que generan las rectas normales y binormales a una curva dada. La superficie que generan las tangentes es una superficie reglada desarrollable, en tanto que las que generan las normales y binormales solamente son desarrollables en el caso de curvas planas.

## Primera forma cuadrática fundamental

Se denomina así a la forma de desarrollar sobre la superficie una geometría local, susceptible de definir en el entorno de cada punto una forma de medir longitudes, ángulos, superficies, y por lo tanto dibujar en el entorno de cada punto figuras geométricas elementales, como triángulos, cuadrados, círculos, etc. y establecer relaciones entre ellas.

Si $\boldsymbol{r}(u_1, u_2)$ es la ecuación paramétrica de una superficie, y llamamos $\boldsymbol{r}_i \equiv \boldsymbol{r}_{u_i}$, se define el **tensor métrico** mediante $g_{ij} = \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_j = g_{ji}$. El elemento de arco de una curva contenida en la superficie es

$$ds = |d\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}_1 du_1 + \boldsymbol{r}_2 du_2| = \sqrt{g_{11}du_1^2 + 2g_{12}du_1du_2 + g_{22}du_2^2},$$

y si la curva viene parametrizada en términos de un parámetro $t$ mediante $\{u_1(t), u_2(t)\}$,

$$ds = \sqrt{g_{11}{u_1'}^2 + 2g_{12}u_1'u_2' + g_{22}{u_2'}^2}\, dt,$$

por lo que la longitud de una curva contenida en una superficie, se calcula mediante

$$l = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{11}(t){u_1'}^2(t) + 2g_{12}(t)u_1'(t)u_2'(t) + g_{22}(t){u_2'}^2(t)}\, dt.$$

Los coeficientes de la métrica son los coeficientes de la primera forma cuadrática fundamental. Conocida la métrica, es decir las tres funciones $g_{ij}(u_1, u_2)$, podemos por lo tanto medir distancias sobre la superficie y también ángulos entre curvas, pues si $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 du_1 + \boldsymbol{r}_2 du_2$ y $d\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}_1 dv_1 + \boldsymbol{r}_2 dv_2$ son dos arcos infinitesimales asociados a dos curvas que pasan por el mismo punto, el coseno del ángulo que forman se obtiene de

$$\cos\theta = \frac{g_{11}du_1dv_1 + g_{12}du_1dv_2 + g_{21}du_2dv_1 + g_{22}du_2dv_2}{\sqrt{g_{11}du_1^2 + 2g_{12}du_1du_2 + g_{22}du_2^2}\sqrt{g_{11}dv_1^2 + 2g_{12}dv_1dv_2 + g_{22}dv_2^2}}.$$

Pero si podemos medir longitudes sobre la superficie también podremos medir áreas. El elemento de área se expresa en función de los coeficientes $g_{ij}$ mediante:

$$dA = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, du_1du_2.$$

donde el radicando $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = |\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2|^2 > 0$, está siempre definido en una superficie regular. En el caso del plano euclídeo, la forma de medir distancias, ángulos y áreas es también la misma solo que, en cada punto, los coeficientes $g_{11} = 1$, $g_{12} = g_{21} = 0$ y $g_{22} = 1$ son siempre los mismos, y así

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad dA = dxdy$$

Podemos considerar al tensor métrico $g_{ij}$ como una matriz $2 \times 2$, simétrica $g_{ij} = g_{ji}$ y definida positiva, $g \equiv \det g_{ij} > 0$, por lo que puede diagonalizarse y sus valores propios son números reales positivos. La diagonalización de la matriz $g_{ij}$ en cada punto es equivalente a usar sobre la superficie una parametrización tal que las líneas $u =$ cte y $v =$ cte. son ortogonales en cada punto. En general esto se podrá hacer de forma local pero no siempre existirá para una superficie una parametrización global que implique que esto se cumple en todos los puntos, como ocurre para el plano euclídeo y en coordenadas cartesianas.

Si consideramos una esfera, y parametrizamos todo punto de la esfera por el ángulo cenital $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ que caracteriza a cada paralelo, y por el acimutal $0 \leq \phi \leq 2\pi$ que nos define a los distintos meridianos, vemos que las líneas $\theta =$ cte y $\phi =$ cte. se cortan de forma perpendicular en cada punto, por lo que $g_{\theta\theta} = 1$, $g_{\theta\phi} = 0$, $g_{\phi\phi} = 1$, salvo en los polos $\theta = \pm\pi/2$ pero $\phi$ arbitrario, en que con esta parametrización todos los puntos no están unívocamente definidos. En los polos, aunque existe el plano tangente puesto que la superficie es regular, sin embargo no se pueden definir los vectores tangentes a las líneas coordenadas, ya que pasan por ellos infinitas líneas $\phi =$ cte.

## Segunda forma cuadrática fundamental

Se denomina así a una forma de medir localmente en cada punto de una superficie conceptos como el de curvatura de la superficie, curvaturas de sus secciones normales, etc., es decir el saber desde el punto de vista local cuánto se aparta la superficie con respecto a su plano tangente, en las diferentes direcciones.

Analicemos el comportamiento de una superficie en un punto con respecto a su plano tangente. Sea

$$\boldsymbol{n}(u_1, u_2) = \frac{\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2|}$$

el vector unidad perpendicular al plano tangente. Si desarrollamos $\boldsymbol{r}(u+du, v+dv)$ en serie de Taylor hasta términos de segundo orden

$$\boldsymbol{r}(u + du, v + dv) = \boldsymbol{r}(u, v) + \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv + \frac{1}{2!}\left(\boldsymbol{r}_{uu}(du^2) + 2\boldsymbol{r}_{uv}dudv + \boldsymbol{r}_{vv}(dv^2)\right) + \cdots,$$

por lo que a orden más bajo

$$(\boldsymbol{r}(u + du, v + dv) - \boldsymbol{r}(u, v)) \cdot \boldsymbol{n} = \frac{1}{2!}\left(L_{uu}(du^2) + 2L_{uv}dudv + L_{vv}(dv^2)\right)$$

que recibe el nombre de segunda forma cuadrática fundamental y que representa la desviación normal de la superficie respecto del plano tangente. Los coeficientes $L_{ij} = \boldsymbol{r}_{ij} \cdot \boldsymbol{n}$ que involucran hasta las segundas derivadas de $\boldsymbol{r}$, dan cuenta de la curvatura de la superficie. La superficie $z = L_{11}x^2 + 2L_{12}xy + L_{22}y^2$ recibe el nombre de **paraboloide osculador** a la superficie en el punto dado. Si $L_{11}L_{22} - L_{12}^2 > 0$ se trata de un paraboloide elíptico y se dice que el punto es elíptico. Si

$L_{11}L_{22} - L_{12}^2 < 0$ entonces es un paraboloide hiperbólico y se dice que el punto es hiperbólico. Si $L_{11}L_{22} - L_{12}^2 = 0$ pero no todos los $L_{ij}$ son nulos, entonces la superficie osculatriz es un cilindro parabólico y el punto se dice que es parabólico. Finalmente si todos los $L_{ij} = 0$, la superficie no tiene curvatura en ese punto y se dice que el punto es plano.

## Curvatura normal de una curva sobre la superficie

Se denomina a la proyección sobre $\boldsymbol{n}$ del vector $\dot{\boldsymbol{t}}$ de la curva de la correspondiente sección normal.

$$\kappa_n = \dot{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{L_{uu}(du/dt)^2 + 2L_{uv}(du/dt)(dv/dt) + L_{vv}(dv/dt)^2}{g_{uu}(du/dt)^2 + 2g_{uv}(du/dt)(dv/dt) + g_{vv}(dv/dt)^2}. \tag{9.1}$$

En efecto, fijada una dirección sobre la superficie, dando los valores de $du$ y $dv$, resulta que el vector tangente

$$\boldsymbol{r}'dt = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv = \dot{\boldsymbol{r}}\frac{ds}{dt}dt = \boldsymbol{t}\frac{ds}{dt}dt, \quad \boldsymbol{r}''dt^2 = \dot{\boldsymbol{t}}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 dt^2 + \boldsymbol{t}\frac{d^2s}{dt^2}dt^2 = \boldsymbol{r}_{uu}du^2 + 2\boldsymbol{r}_{uv}du dv + \boldsymbol{r}_{vv}dv^2,$$

y al proyectar sobre el vector normal a la superficie, dado que $\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{n} = 0$, obtenemos (9.1).

## Radios de curvatura y direcciones principales

Como en el entorno de un punto la superficie se comporta a orden más bajo como un paraboloide (elíptico o hiperbólico), como un cilindro o bien como un plano, dependiendo de la dirección $u$-$v$ la curvatura normal se escribe, con $du = \epsilon \cos\theta$ y $dv = \epsilon \sin\theta$,

$$\kappa_n = L_{uu}\cos^2\theta + 2L_{uv}\cos\theta\sin\theta + L_{vv}\sin^2\theta,$$

y haciendo $|\kappa_n| = 1/r^2$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, resulta la cónica $L_{uu}x^2 + 2L_{uv}xy + L_{vv}y^2 = \pm 1$, denominada indicatriz de Dupin, cuyos ejes determinan las direcciones de curvatura máxima y mínima y cuya distancia al origen del punto $(x, y)$ es el inverso de la raiz cuadrada de $|\kappa_n|$. A los radios de curvatura según esas dos direcciones principales los representamos por $R_1$ y $R_2$ y a sus inversos se les denomina curvaturas principales.

Si $R_1 = R_2$ el punto se llama **cíclico o umbilical**. Si $R_1$ y $R_2$ tienen el mismo signo el punto se llama **elíptico**. Si $R_1$ y $R_2$ tienen signo opuesto el punto se llama **hiperbólico**. Si $R_1$ o $R_2$ es infinito el punto se llama **parabólico**.

Si establecemos que (9.1) sea máximo o mínimo, como función de la dirección, esto es de $du$ y $dv$, estos valores de la curvatura reciben el nombre de curvaturas principales. Las curvaturas principales satisfacen la ecuación

$$(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)\kappa^2 - (g_{11}L_{22} + g_{22}L_{11} - 2g_{12}L_{12})\kappa + (L_{11}L_{22} - L_{12}^2) = 0, \tag{9.2}$$

que dividiendo por el primer coeficiente se pone como

$$\kappa^2 - 2H\kappa + K = 0. \tag{9.3}$$

En efecto, fijada una dirección sobre la superficie, la curvatura normal $\kappa(du, dv)$, es función de esta dirección. Como además satisface (9.1) que la reescribimos como

$$\kappa(du, dv)(g_{uu}du^2 + 2g_{uv}du dv + g_{vv}dv^2) - (L_{uu}du^2 + 2L_{uv}du dv + L_{vv}dv^2) = 0,$$

derivando esta expresión con respecto de $du$ y $dv$ e igualando a cero, sabiendo que en las direcciones en que $\kappa$ es máxima o mínima las derivadas de $\kappa$ se deben anular, resulta un sistema de dos ecuaciones para determinar las direcciones en que estas curvaturas son máximas o mínimas:

$$(L_{uu} - \kappa g_{uu})du + (L_{uv} - \kappa g_{uv})dv = 0, \quad (L_{uv} - \kappa g_{uv})du + (L_{vv} - \kappa g_{vv})dv = 0, \tag{9.4}$$

que es un sistema lineal homogéneo en las incógnitas $du$ y $dv$, cuyo determinante de las incógnitas se debe anular, lo que conduce a (9.2). Las dos soluciones para $\kappa$, corresponden a los valores máximo y mínimo, $\kappa_1$ y $\kappa_2$. Sustituidos esos valores en (9.4) se obtendrán las direcciones $(du, dv)$ en que las correspondientes secciones normales tienen esas curvaturas. El resultado general es que estas dos direcciones principales son ortogonales.

Con los coeficientes de la primera y segunda formas cuadrticas fundamentales, obtenemos dos características de la curvatura en cada punto, de una superficie:

**Curvatura media**

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{g_{11}L_{22} + g_{22}L_{11} - 2g_{12}L_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2). \tag{9.5}$$

**Curvatura de Gauss**

$$K = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{1}{R_1 R_2} = \kappa_1\kappa_2. \tag{9.6}$$

Una superficie reglada es **desarrollable** si se puede desarrollar sobre un plano, como es el caso del cilindro y del cono. La condición necesaria para que una superficie sea desarrollable es que la curvatura de Gauss $K = 0$.

Las **ecuaciones fundamentales** de la teoría de superficies son las que establecen cómo cambian por unidad de cada uno de los parámetros, los vectores tangentes $\boldsymbol{r}_1$ y $\boldsymbol{r}_2$ y el vector normal $\boldsymbol{n}$. Como $\boldsymbol{r}_1$ y $\boldsymbol{r}_2$ no son colineales y $\boldsymbol{n}$ es ortogonal a ellos, entonces estas derivadas quedan expresadas en términos de estos tres vectores. Reciben el nombre de ecuaciones de **Gauss-Weingarten** y son

$$\boldsymbol{r}_{ij} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial u^j} = \Gamma^k{}_{ij}\boldsymbol{r}_k + L_{ij}\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{n}_i \equiv \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^i} = -L_i{}^k \boldsymbol{r}_k,$$

donde los coeficientes $\Gamma^k{}_{ij}$, y $L_i{}^k$, se pueden expresar exclusivamente en términos de la métrica $g_{ij}$ y de sus primeras derivadas y de los coeficientes $L_{ij}$ de la segunda forma fundamental.

Conocido $g_{ij}$, se calcula $g^{jk}$, tal que $g^{jk}g_{ki} = \delta^j_i$.

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \quad g^{12} = g^{21} = \frac{-g_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

$$\Gamma^k{}_{ij} = g^{kl}\boldsymbol{r}_{ij} \cdot \boldsymbol{r}_l = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right), \quad L_{ij} = \boldsymbol{r}_{ij} \cdot \boldsymbol{n}, \qquad L_i{}^k = g^{kj}L_{ij}.$$

El **tensor de curvatura** de la superficie se define como

$$R_{ijkl} = L_{ik}L_{jl} - L_{il}L_{jk}, \quad R^i{}_{jkl} = g^{im}R_{mjkl}.$$

La curvatura media se reescribe $2H = g^{ij}L_{ij}$, y la curvatura de Gauss $K = L_1{}^1 L_2{}^2 - L_1{}^2 L_2{}^1$.

## Geodésicas sobre una superficie

Dados dos puntos sobre una superficie, se define una línea geodésica entre ellos como la curva contenida en la superficie que posee la menor longitud. Esta curva tiene la propiedad de que su normal principal es siempre ortogonal a la superficie, y recíprocamente. Por lo tanto, por todo punto de una superficie, fijada la dirección del vector tangente, pasa una y solo una línea geodésica.

Si parametrizamos la curva mediante el elemento de arco, entonces la longitud entre ambos puntos debe ser mínima, por lo que

$$l = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{g_{ij}(u_1, u_2)\dot{u}_i\dot{u}_j}\, ds$$

Si esta integral debe ser mínima, el cálculo variacional nos lleva a que las funciones $u_1(s)$ y $u_2(s)$, que definen las ecuaciones paramétricas de la curva sobre la superficie, deben satisfacer el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\dot{u}_i\dot{u}_j - \frac{d}{ds}\left(g_{ik}\dot{u}_i + g_{kj}\dot{u}_j\right) = 0, \quad \text{y} \quad \text{como} \quad \frac{d}{ds}g_{ik} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_l}\dot{u}_l,$$

resulta que

$$\ddot{u}_k + \Gamma^k{}_{ij}\dot{u}_i\dot{u}_j = 0, \quad k = 1, 2,$$

con las condiciones de contorno en $s_0$ y $s_1$. Vemos, por ejemplo, que si la métrica no es función de punto, los coeficientes $\Gamma^k{}_{ij} = 0$ y las geodésicas se reducen a $u_1(s) = as + b$, $u_2(s) = cs + d$, que eliminando $s$ entre ambas, resultan ser las 'rectas' $u_2 = mu_1 + h$. Las rectas son las geodésicas del plano euclídeo.

## Problemas

**9.1** Hallar la ecuación de la superficie tangente a la curva $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{e}_1 + t^2\boldsymbol{e}_2 + t^3\boldsymbol{e}_3$

**9.2** Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie $x = u^2 + v^2$, $y = u^3$, $z = v^3$ y que sea paralelo al plano $x + y - z = 0$. [Sol. $x + y - z = 8/27$.]

**9.3** Dadas las siguientes formas cuadráticas, decir cuáles no constituyen una forma cuadrática válida para caracterizar a una superficie regular.

$$\text{(a)} \quad ds^2 = du^2 + 4dudv + dv^2; \quad \text{(b)} \quad ds^2 = du^2 + 4dudv + 4dv^2;$$

$$\text{(c)} \quad ds^2 = du^2 - 4dudv + 6dv^2; \quad \text{(d)} \quad ds^2 = du^2 + 4dudv - 2dv^2;$$

**9.4** Encontrar las fórmulas de transformación de los coeficientes $g_{ij}$ de la primera forma cuadrática fundamental cuando se realiza un cambio de parametrización de la superficie. Determinar asímismo como se modifica el elemento de área $dA = Hdudv = \sqrt{g_{uu}g_{vv} - g_{uv}^2}dudv$.

**9.5** Demostrar que el plano tangente a la superficie $f(x - az, y - bz) = 0$ en cualquier punto, es paralelo a una dirección fija.

**9.6** Demostrar que los planos tangentes a la superficie

$$z = x\phi(y/x)$$

en cualquier punto, pasan todos por el origen de coordenadas.

**9.7** Probar que las ecuaciones paramétricas

$$x = a\frac{1 - u^2 - v^2}{1 + u^2 + v^2}, \quad y = \frac{2bu}{1 + u^2 + v^2}, \quad z = \frac{2cv}{1 + u^2 + v^2},$$

se reducen en su forma cartesiana a las ecuaciones del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

**9.8** Probar que las dos superficies $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9$, $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y - 6z + 24 = 0$, son tangentes entre sí en el punto $(2, 1, 1)$.

**9.9** Dada la superficie parametrizada

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = u, \quad 0 < u < \infty, \quad v \in (0, 2\pi),$$

(a) Demostrar que se trata de un cono con vértice en (0,0,0) y el semiángulo con su eje es $\pi/4$.
(b) Encontrar el punto del cono donde el plano tangente es paralelo al plano $z - x = 0$ y calcular el plano tangente en dicho punto.
(c) Calcular la curvatura media y curvatura de Gauss en cada punto de la superficie. ¿Cuáles son las curvaturas principales?

[Examen Septiembre 2003]

**9.10** Encontrar la superficie envolvente de la familia de planos $u^3 - 3u^2x + 3uy - z = 0$, donde $u$ es el parámetro que determina cada plano de la familia. Lo mismo para la familia de planos $x\sin u - y\cos u + kz - au = 0$, con $a =$cte.

**9.11** En el elipsoide

$$x = a\sin u\cos v, \quad y = b\sin u\sin v, \quad z = c\cos u$$

encontrar su ecuación cartesiana y las curvas coordenadas $u =$cte y $v =$cte.

**9.12** Encontrar la ecuación cartesiana de la superficie construida al girar la recta $x = 1$, $z = 2y$, alrededor del eje $OZ$. [Sol. $x^2 + y^2 - z^2/4 = 1$.]

**9.13** Encontrar la familia formada por los planos rectificantes de la hélice

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos t\boldsymbol{e}_1 + a\sin t\boldsymbol{e}_2 + bt\boldsymbol{e}_3.$$

Calcular la superficie envolvente de la anterior familia.

**9.14** Demostrar que

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \frac{u+v}{2}\,\boldsymbol{e}_1 + \frac{u-v}{2}\,\boldsymbol{e}_2 + uv\,\boldsymbol{e}_3.$$

es una representación paramétrica del paraboloide hiperbólico $z^2 = x^2 - y^2$. Encontrar cómo son las curvas $u =$cte y $v =$cte sobre dicha superficie. Encontrar también las curvas de corte con planos paralelos a los coordenados.

**9.15** Demostrar que si una curva está sobre la superficie de una esfera, entonces

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\dot\kappa}{\kappa^2\tau}\right) - \frac{\tau}{\kappa} = 0.$$

**9.16** Demostrar que si $z = f(y)$ es una curva en el plano $ZY$ entonces la superficie

$$\boldsymbol{r}(u,v) = u\cos v\,\boldsymbol{e}_1 + u\sin v\,\boldsymbol{e}_2 + f(u)\,\boldsymbol{e}_3,$$

es la superficie de revolución que genera la curva $z = f(y)$ al girar alrededor del eje $OZ$.

**9.17** Encontrar la ecuación de un cono de revolución alrededor del eje $OX$ con vértice en el punto $(a,0,0)$ y cuyo semiángulo en el vértice es de $30°$.

**9.18** Verificar que la superficie

$$\boldsymbol{r}(\theta,\phi) = (b + a\sin\phi)\cos\theta\,\boldsymbol{e}_1 + (b + a\sin\phi)\sin\theta\,\boldsymbol{e}_2 + a\cos\phi\,\boldsymbol{e}_3,$$

es un toro de revolución. Analizar los parámetros utilizados. Calcular el plano tangente y la recta normal al toro en un punto cualquiera. ¿En qué puntos el plano tangente es paralelo al plano $x - 2y + z - 3 = 0$?

**9.19** Dadas dos circunferencias de radio $r$, paralelas y separadas una distancia $2h$, encontrar la ecuación paramétrica y cartesiana de un hiperboloide de una hoja construido al unir con rectas puntos de ambas circunferencias donde cada punto de una de las circunferencias se une con el correspondiente de la otra que se encuentra girado un ángulo $\theta$ respecto de él. Encontrar también la ecuación de esta superficie pero rotando cierta recta alrededor del eje $OZ$. ¿Qué sucede si $\theta = 0$?

**9.20** Sobre una superficie $\boldsymbol{r}(u_1,u_2)$, si llamamos $\boldsymbol{r}_i \equiv \boldsymbol{r}_{u_i}$, se define el **tensor métrico** mediante $g_{ij} = \boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j$. Demostrar que el vector unidad normal a la superficie viene dado por

$$\boldsymbol{n}(u_1,u_2) = \frac{\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}$$

y donde el anterior denominador es precisamente el valor absoluto del vector que aparece en el numerador. Verificar que el área de una superficie es precisamente $A = \int_S \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}du_1du_2$. De la misma manera, el ángulo $\theta$ que forman los vectores tangentes $\boldsymbol{r}_1$ y $\boldsymbol{r}_2$ es

$$\cos\theta = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}.$$

**9.21** Demostrar que la superficie

$$\boldsymbol{r}(u,v) = u\boldsymbol{e}_1 + v\boldsymbol{e}_2 + (u^2 + v^3)\boldsymbol{e}_3,$$

es elíptica si $v > 0$, hiperbólica si $v < 0$ y parabólica si $v = 0$.

**9.22** Demostrar que los puntos de la superficie tangente a una curva dada son puntos parabólicos.

**9.23** La primera y segunda formas cuadráticas fundamentales se escriben:

$$I = d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r}, \quad II = d^2\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = -d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{n}.$$

La tercera forma cuadrática fundamental se define mediante $III = d\boldsymbol{n} \cdot d\boldsymbol{n}$. Demostrar que se satisface:

$$III - 2HII + KI = 0,$$

donde $H$ y $K$ son respectivamente la curvatura media y curvatura de Gauss.

**9.24** Dada la curva $z = y^2 + 2$ en el plano $YOZ$, encontrar la superficie de revolución generada por esta curva al girar alrededor del eje $OY$. Encontrar la ecuación del plano tangente a esta superficie en el punto $(11, 3, 0)$.

**9.25** Demostrar que si una superficie se escribe en la forma $z = f(x, y)$, la curvatura de Gauss viene dada por

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}$$

**9.26** Demostrar que si tenemos dada la superficie de revolución alrededor del eje $OZ$

$$\boldsymbol{r}(t, \theta) = f(t)\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + f(t)\sin\theta \boldsymbol{e}_2 + t\boldsymbol{e}_3, \quad f(t) > 0$$

entonces dicha supeficie es una superficie parabólica (curvatura de Gauss nula) si y solo si se trata de un cilindro con generatrices paralelas a $OZ$ o bien de un cono de eje $OZ$

**9.27** Si tenemos dada una curva regular parametrizada por el arco $s$, $\boldsymbol{r}(s)$, contruimos sobre ella una superficie en forma de tubo, definiendo en el plano normal a la curva un círculo de radio $R$ centrado en la curva. Haciendo que este círculo viaje con su centro a lo largo de la curva, nos da la ecuación de una superficie tubular de la forma:

$$\boldsymbol{r}^*(s, u) = \boldsymbol{r}(s) + R(\boldsymbol{v}_2(s)\cos u + \boldsymbol{v}_3(s)\sin u), \quad R > 0, \quad 0 \leq u \leq 2\pi.$$

donde $\boldsymbol{v}_2(s)$ y $\boldsymbol{v}_3(s)$ son respectivamente el vector normal principal y el vector binormal de la curva en el punto $s$. Se pide:
(a) Calcular los vectores derivados que definen al plano tangente en cada punto.
(b) Demostrar que, salvo un signo, el vector unidad normal a la superficie en cada punto $\boldsymbol{n}(s, u)$, tiene la dirección del vector unidad $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_2(s)\cos u + \boldsymbol{v}_3(s)\sin u$.
(c) ¿En qué puntos es la superficie irregular?
(d) En el supuesto de que la curva $\boldsymbol{r}(s)$ fuese plana, ¿en qué puntos de la superficie el plano tangente es paralelo al plano osculador de la curva? [Examen Junio 2005]

**9.28** La superficie catenoide viene dada por la siguiente parametrización:

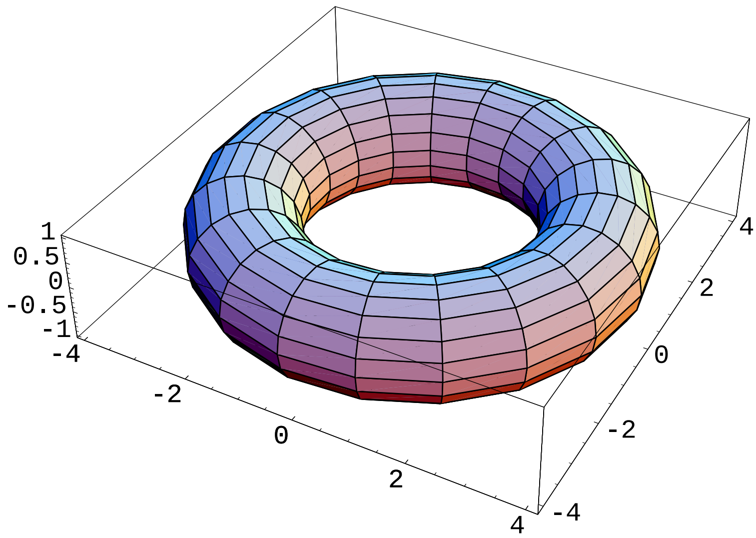
$$\boldsymbol{r}(u, v) = \cosh v \cos u\boldsymbol{e}_1 + \cosh v \sin u\boldsymbol{e}_2 + v\boldsymbol{e}_3, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

(a) Calcular la curvatura de Gauss en todo punto.
(b) Calcular la ecuación cartesiana de la recta normal en el punto $\boldsymbol{r}(0, 0)$.
(c) Si consideramos la curva sobre esta superficie definida por $\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{r}(t, t)$, determinar la curvatura de esta curva en todo punto y su plano osculador en $t = 0$.
[Examen Septiembre 2007]

## Algunas superficies notables

### Toro

$$x(\theta,\phi)=(b+a\cos\theta)\cos\phi,\quad y(\theta,\phi)=(b+a\cos\theta)\sin\phi,\quad z(\theta,\phi)=a\sin\theta.$$




Es una rosquilla de radio central $b$ y de sección circular de radio $a<b$.

$$\boldsymbol{r}_\theta=(-a\sin\theta\cos\phi,-a\sin\theta\sin\phi,a\cos\theta),\quad \boldsymbol{r}_\phi=(-(b+a\cos\theta)\sin\phi,(b+a\cos\theta)\cos\phi,0),$$

$$|\boldsymbol{r}_\theta\times\boldsymbol{r}_\phi|=a(b+a\cos\theta)\neq 0,\quad a<b.$$

$$\boldsymbol{n}=(-\cos\theta\cos\phi,-\cos\theta\sin\phi,-\sin\theta).$$

Existe por lo tanto el vector normal en todo punto de la superficie.

$$\boldsymbol{r}_{\theta\theta}=(-a\cos\theta\cos\phi,-a\cos\theta\sin\phi,-a\sin\theta),$$

$$\boldsymbol{r}_{\phi\phi}=(-(b+a\cos\theta)\cos\phi,-(b+a\cos\theta)\sin\phi,0),$$

$$\boldsymbol{r}_{\theta\phi}=(a\sin\theta\sin\phi,-a\sin\theta\cos\phi,0).$$

**Coeficientes de la métrica, o primera forma cuadrática fundamental**

$$g_{\theta\theta}\equiv g_{11}=a^2,\quad g_{\phi\phi}\equiv g_{22}=(b+a\cos\theta)^2,\quad g_{\theta\phi}\equiv g_{12}=0,\quad \det g=a^2(b+a\cos\theta)^2\neq 0,\quad a<b.$$

**Coeficientes de la segunda forma cuadrática fundamental**

$$L_{\theta\theta}\equiv L_{11}=a,\quad L_{\theta\phi}\equiv L_{12}=0,\quad L_{\phi\phi}\equiv L_{22}=(b+a\cos\theta)\cos\theta$$

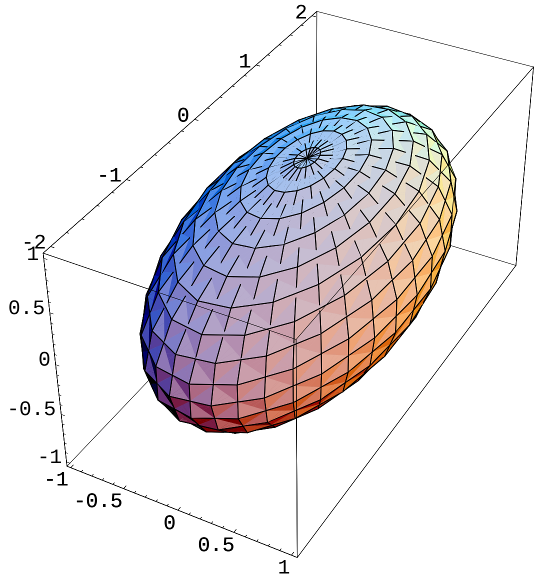
**La curvatura media y la curvatura de Gauss**

$$H=\frac{(b+2a\cos\theta)}{2a(b+a\cos\theta)},\quad K=\frac{\cos\theta}{a(b+a\cos\theta)}.$$

## Elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$x(\theta,\phi) = a\cos\theta\cos\phi, \quad y(\theta,\phi) = b\cos\theta\sin\phi, \quad z(\theta,\phi) = c\sin\theta.$$




$$\boldsymbol{r}_\theta = (-a\sin\theta\cos\phi, -b\sin\theta\sin\phi, c\cos\theta), \quad \boldsymbol{r}_\phi = (-a\cos\theta\sin\phi, b\cos\theta\cos\phi, 0),$$

$$|\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\phi| = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{\det g}.$$

$$\boldsymbol{r}_{\theta\theta} = (-a\cos\theta\cos\phi, -b\cos\theta\sin\phi, -c\sin\theta), \qquad \boldsymbol{r}_{\phi\phi} = (-a\cos\theta\cos\phi, -b\cos\theta\sin\phi, 0),$$

$$\boldsymbol{r}_{\theta\phi} = (a\sin\theta\sin\phi, -b\sin\theta\cos\phi, 0),$$

$$\boldsymbol{n} = (-bc\cos\theta\cos\phi, -ac\cos\theta\sin\phi, -ab\sin\theta)/\sqrt{a^2b^2\sin^2\theta + c^2\cos^2\theta(a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi)}$$

**Coeficientes de la métrica, o primera forma cuadrática fundamental**

$$g_{\theta\theta} \equiv g_{11} = (a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi)\sin^2\theta + c^2\cos^2\theta, \quad g_{\phi\phi} \equiv g_{22} = (a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi)\cos^2\theta,$$

$$g_{\theta\phi} \equiv g_{12} = (a^2 - b^2)\sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi,$$

$$\det g = \cos^2\theta\left(a^2b^2\sin^2\theta + c^2\cos^2\theta(a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi)\right).$$

**Coeficientes de la segunda forma cuadrática fundamental**

$$L_{\theta\theta} \equiv L_{11} = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2\sin^2\theta + c^2\cos^2\theta(b^2\cos^2\phi + a^2\sin^2\phi)}}, \quad L_{\theta\phi} \equiv L_{12} = 0,$$

$$L_{\phi\phi} \equiv L_{22} = \frac{abc\cos^2\theta}{\sqrt{a^2b^2\sin^2\theta + c^2\cos^2\theta(b^2\cos^2\phi + a^2\sin^2\phi)}}.$$

**La curvatura media y la curvatura de Gauss**

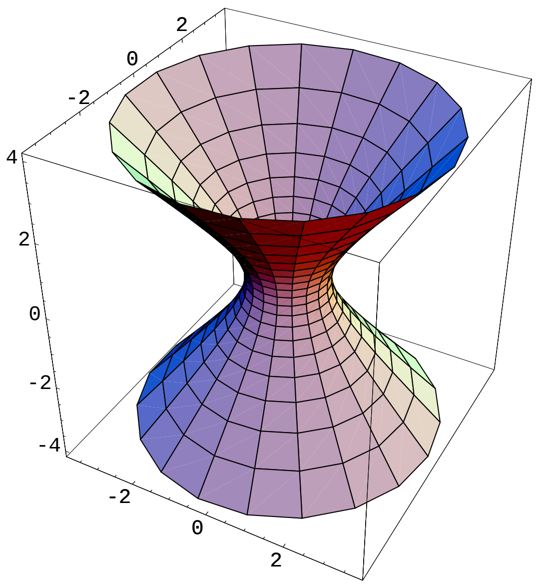
$$H = \frac{abc((a^2 + b^2\sin^2\theta)\sin^2\phi + (b^2 + a^2\sin^2\theta)\cos^2\phi + c^2\cos^2\theta)}{2(a^2b^2\sin^2\theta + c^2\cos^2\theta(b^2\cos^2\phi + a^2\sin^2\phi))^{3/2}},$$

$$K = \frac{a^2b^2c^2}{(a^2b^2\sin^2\theta + c^2\cos^2\theta(b^2\cos^2\phi + a^2\sin^2\phi))^2}.$$

## Hiperboloide de una hoja

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$x(\theta,\phi) = a\cosh\theta\cos\phi, \quad y(\theta,\phi) = b\cosh\theta\sin\phi, \quad z(\theta,\phi) = c\sinh\theta.$$




$$\boldsymbol{r}_\theta = (a\sinh\theta\cos\phi, b\sinh\theta\sin\phi, c\cosh\theta) \quad \boldsymbol{r}_\phi = (-a\cosh\theta\sin\phi, b\cosh\theta\cos\phi, 0),$$

$$|\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\phi| = \sqrt{\det g}.$$

$$\boldsymbol{r}_{\theta\theta} = (a\cosh\theta\cos\phi, b\cosh\theta\sin\phi, c\sinh\theta)$$

$$\boldsymbol{r}_{\phi\phi} = (-a\cosh\theta\cos\phi, -b\cosh\theta\sin\phi, 0),$$

$$\boldsymbol{r}_{\theta\phi} = (-a\sinh\theta\sin\phi, b\sinh\theta\cos\phi, 0)$$

$$\boldsymbol{n} = (-bc\cosh\theta\cos\phi, -ac\cosh\theta\sin\phi, ab\sinh\theta)/\sqrt{c^2(a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi)\cosh^2\theta + a^2b^2\sinh^2\theta}$$

**Coeficientes de la métrica, o primera forma cuadrática fundamental**

$$g_{\theta\theta} \equiv g_{11} = (a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi)\sinh^2\theta + c^2\cosh^2\theta, \quad g_{\phi\phi} \equiv g_{22} = (a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi)\cosh^2\theta,$$

$$g_{\theta\phi} \equiv g_{12} = (b^2 - a^2)\sinh\theta\cosh\theta\sin\phi\cos\phi,$$

$$\det g = \cosh^2\theta\left(c^2(a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi)\cosh^2\theta + a^2b^2\sinh^2\theta\right).$$

**Coeficientes de la segunda forma cuadrática fundamental**

$$L_{\theta\theta} \equiv L_{11} = \frac{-abc}{\sqrt{c^2(a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi)\cosh^2\theta + a^2b^2\sinh^2\theta}}, \quad L_{\theta\phi} \equiv L_{12} = 0,$$

$$L_{\phi\phi} \equiv L_{22} = \frac{-abc\cosh^2\theta}{\sqrt{c^2(a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi)\cosh^2\theta + a^2b^2\sinh^2\theta}}.$$

**La curvatura media y la curvatura de Gauss**

$$H = \frac{abc\left(-a^2\sin^2\phi - b^2\cos^2\phi + c^2\cosh^2\theta + (a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi)\sinh^2\theta\right)}{2\left(c^2(a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi)\cosh^2\theta + a^2b^2\sinh^2\theta\right)^{3/2}},$$

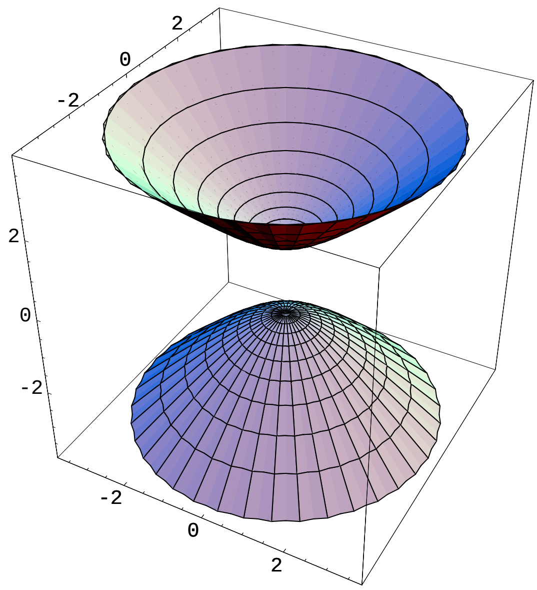
$$K = \frac{-16a^2b^2c^2}{\{[a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)\cos(2\phi)]c^2(1 + \cosh(2\theta)) + 2a^2b^2(1 - \cosh(2\theta))\}^2} < 0.$$

Es una superficie en la que todos sus puntos son hiperbólicos.

## Hiperboloide de dos hojas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

$$x(\theta, \phi) = a \sinh \phi \cos \theta, \quad y(\theta, \phi) = b \sinh \phi \sin \theta, \quad z(\theta, \phi) = \pm c \cosh \phi.$$




$$\boldsymbol{r}_\theta = (-a \sinh \phi \sin \theta, b \sinh \phi \cos \theta, 0)$$

$$\boldsymbol{r}_\phi = (a \cosh \phi \cos \theta, b \cosh \phi \sin \theta, c \sinh \phi)$$

$$|\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\phi| = \sqrt{a^2 b^2 \cosh^2 \phi \sinh^2 \phi + c^2 (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) \sinh^4 \phi}.$$

**Coeficientes de la métrica, o primera forma cuadrática fundamental**

$$g_{\theta\theta} \equiv g_{11} = (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) \sinh^2 \phi,$$

$$g_{\phi\phi} \equiv g_{22} = (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) \cosh^2 \phi + c^2 \sinh^2 \phi,$$

$$g_{\theta\phi} \equiv g_{12} = (b^2 - a^2) \sin \theta \cos \theta \sinh \phi \cosh \phi,$$

$$\det g = |\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\phi|^2.$$

**Coeficientes de la segunda forma cuadrática fundamental**

$$L_{\theta\theta} \equiv L_{11} = \frac{-abc \sinh^3 \phi}{\sqrt{a^2 b^2 \cosh^2 \phi \sinh^2 \phi + c^2 (b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta) \sinh^4 \phi}},$$

$$L_{\theta\phi} \equiv L_{12} = 0,$$

$$L_{\phi\phi} \equiv L_{22} = \frac{-abc \sinh \phi}{\sqrt{a^2 b^2 \cosh^2 \phi \sinh^2 \phi + c^2 (b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta) \sinh^4 \phi}}.$$

**La curvatura media y la curvatura de Gauss**

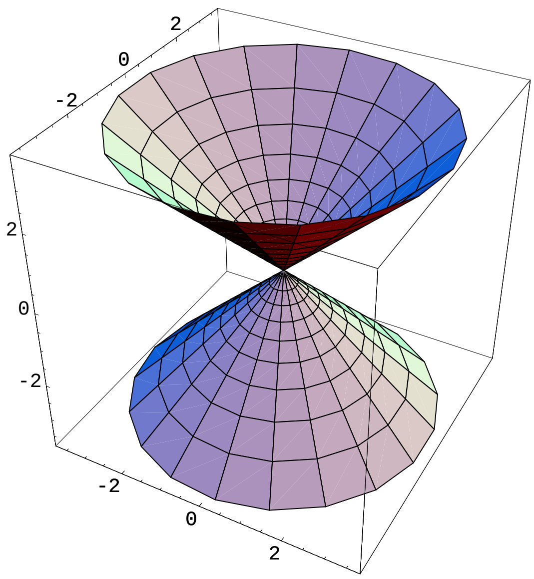
$$H = \frac{-abc(b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta + \cosh^2 \phi (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) + c^2 \sinh^2 \phi)}{2(a^2 b^2 \cosh^2 \phi + c^2 (b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta) \sinh^2 \phi)^{3/2}},$$

$$K = \frac{a^2 b^2 c^2}{a^2 b^2 \cosh^2 \phi + c^2 (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) \sinh^2 \phi}$$

## Cono

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

$$x(\theta,\phi)=a\sinh\phi\cos\theta,\quad y(\theta,\phi)=b\sinh\phi\sin\theta,\quad z(\theta,\phi)=c\sinh\phi.$$




$$\boldsymbol{r}_\theta=(-a\sinh\phi\sin\theta, b\sinh\phi\cos\theta, 0)$$

$$\boldsymbol{r}_\phi=(a\cosh\phi\cos\theta, b\cosh\phi\sin\theta, c\cosh\phi)$$

$$|\boldsymbol{r}_\theta\times\boldsymbol{r}_\phi|=\sqrt{\cosh^2\phi\sinh^2\phi(b^2c^2\cos^2\theta+a^2(b^2+c^2\sin^2\theta))}.$$

**Coeficientes de la métrica, o primera forma cuadrática fundamental**

$$g_{\theta\theta}\equiv g_{11}=(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)\sinh^2\phi,$$

$$g_{\phi\phi}\equiv g_{22}=(c^2+a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)\cosh^2\phi,$$

$$g_{\theta\phi}\equiv g_{12}=(b^2-a^2)\cos\theta\sin\theta\cosh\phi\sinh\phi,$$

$$\det g=|\boldsymbol{r}_\theta\times\boldsymbol{r}_\phi|^2.$$

**Coeficientes de la segunda forma cuadrática fundamental**

$$L_{\theta\theta}\equiv L_{11}=\frac{-abc\sinh\phi}{\sqrt{b^2c^2\cos^2\theta+a^2(b^2+c^2\sin^2\theta)}},$$

$$L_{\theta\phi}\equiv L_{12}=0,$$

$$L_{\phi\phi}\equiv L_{22}=0.$$

**La curvatura media y la curvatura de Gauss**

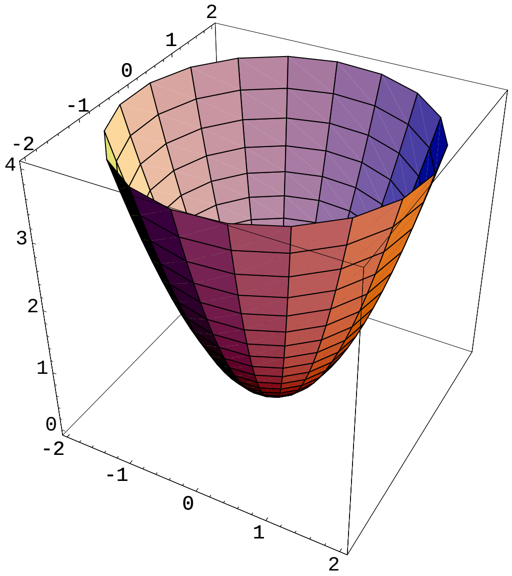
$$H=\frac{-abc(c^2+a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)}{(b^2c^2+a^2(2b^2+c^2)-(a^2-b^2)c^2\cos 2\theta)\sqrt{(b^2c^2\cos^2\theta+a^2(b^2+c^2\sin^2\theta))\sinh^2\phi}},$$

$$K=0$$

## Paraboloide elíptico

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

$$x(\theta,\phi) = a\phi\cos\theta, \quad y(\theta,\phi) = b\phi\sin\theta, \quad z(\theta,\phi) = \phi^2.$$




$$\boldsymbol{r}_\theta = (-a\phi\sin\theta, b\phi\cos\theta, 0)$$

$$\boldsymbol{r}_\phi = (a\cos\theta, b\sin\theta, 2\phi)$$

$$|\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\phi| = \sqrt{a^2\phi^2(b^2 + 4\phi^2\sin^2\theta) + 4b^2\phi^4\cos^2\theta}.$$

**Coeficientes de la métrica, o primera forma cuadrática fundamental**

$$g_{\theta\theta} \equiv g_{11} = (a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)\phi^2,$$

$$g_{\phi\phi} \equiv g_{22} = 4\phi^2 + a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta,$$

$$g_{\theta\phi} \equiv g_{12} = (b^2 - a^2)\phi\sin\theta\cos\theta,$$

$$\det g = |\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\phi|^2.$$

**Coeficientes de la segunda forma cuadrática fundamental**

$$L_{\theta\theta} \equiv L_{11} = \frac{-2ab\phi^3}{\sqrt{4b^2\phi^4\cos^2\theta + a^2\phi^2(b^2 + 4\phi^2\sin^2\theta)}},$$

$$L_{\theta\phi} \equiv L_{12} = 0,$$

$$L_{\phi\phi} \equiv L_{22} = \frac{-2ab\phi}{\sqrt{4b^2\phi^4\cos^2\theta + a^2\phi^2(b^2 + 4\phi^2\sin^2\theta)}}.$$

**La curvatura media y la curvatura de Gauss**

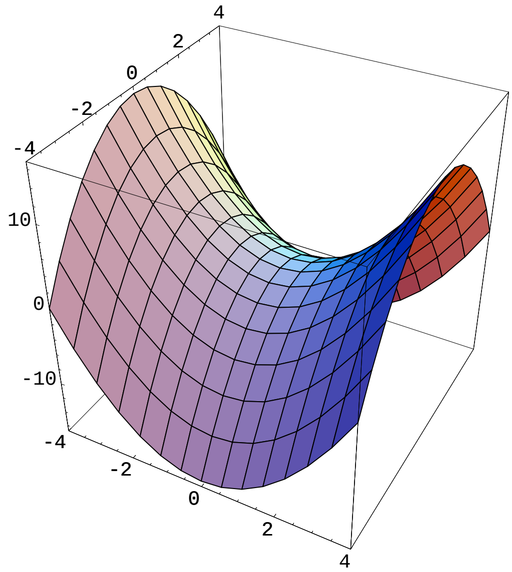
$$H = \frac{-ab\phi(a^2 + b^2 + 4\phi^2)}{(2b^2\phi^2 + a^2(b^2 + 2\phi^2) - 2(a^2 - b^2)\phi^2\cos 2\theta)\sqrt{4b^2\phi^4\cos^2\theta + a^2\phi^2(b^2 + 4\phi^2\sin^2\theta)}},$$

$$K = \frac{4a^2b^2}{(2b^2\phi^2 + a^2(b^2 + 2\phi^2) - 2(a^2 - b^2)\phi^2\cos 2\theta)^2}$$

## Paraboloide hiperbólico

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

$$x(\theta,\phi) = a\phi\cosh\theta, \quad y(\theta,\phi) = b\phi\sinh\theta, \quad z(\theta,\phi) = \phi^2.$$




$$\boldsymbol{r}_\theta = (a\phi\sinh\theta, b\phi\cosh\theta, 0)$$
$$\boldsymbol{r}_\phi = (a\cosh\theta, b\sinh\theta, 2\phi)$$
$$|\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\phi| = \sqrt{4b^2\phi^4\cosh^2\theta + a^2\phi^2(b^2 + 4\phi^2\sinh^2\theta)}.$$

**Coeficientes de la métrica, o primera forma cuadrática fundamental**

$$g_{\theta\theta} \equiv g_{11} = \phi^2(b^2\cosh^2\theta + a^2\sinh^2\theta),$$
$$g_{\phi\phi} \equiv g_{22} = 4\phi^2 + a^2\cosh^2\theta + b^2\sinh^2\theta,$$
$$g_{\theta\phi} \equiv g_{12} = (a^2+b^2)\phi\cosh\theta\sinh\theta,$$
$$\det g = |\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\phi|^2.$$

**Coeficientes de la segunda forma cuadrática fundamental**

$$L_{\theta\theta} \equiv L_{11} = \frac{2ab\phi^3}{\sqrt{4b^2\phi^4\cosh^2\theta + a^2\phi^2(b^2 + 4\phi^2\sinh^2\theta)}},$$
$$L_{\theta\phi} \equiv L_{12} = 0,$$
$$L_{\phi\phi} \equiv L_{22} = \frac{-2ab\phi}{\sqrt{4b^2\phi^4\cosh^2\theta + a^2\phi^2(b^2 + 4\phi^2\sinh^2\theta)}}.$$

**La curvatura media y la curvatura de Gauss**

$$H = \frac{ab\phi(a^2 - b^2 + 4\phi^2)}{(2b^2\phi^2 + a^2(b^2 - 2\phi^2) + 2(a^2+b^2)\phi^2\cosh 2\theta)\sqrt{4b^2\phi^4\cosh^2\theta + a^2\phi^2(b^2 + 4\phi^2\sinh^2\theta)}},$$

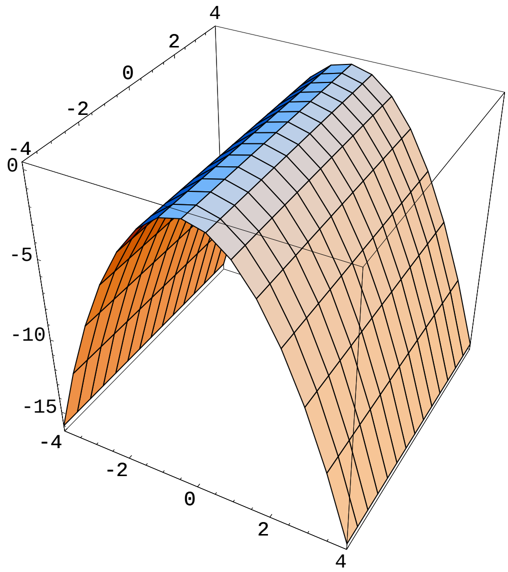
$$K = \frac{-4a^2b^2}{(2b^2\phi^2 + a^2(b^2 - 2\phi^2) + 2(a^2+b^2)\phi^2\cosh 2\theta)^2},$$

La curvatura de Gauss es siempre negativa.

### Cilindro parabólico

$$z = -x^2$$

$$x(\theta,\phi) = \theta, \quad y(\theta,\phi) = \phi, \quad z(\theta,\phi) = -\theta^2.$$




$$\boldsymbol{r}_\theta = (1, 0, -2\theta)$$

$$\boldsymbol{r}_\phi = (0, 1, 0)$$

$$|\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\phi| = \sqrt{1+4\theta^2}.$$

**Coeficientes de la métrica, o primera forma cuadrática fundamental**

$$g_{\theta\theta} \equiv g_{11} = 1 + 4\theta^2,$$

$$g_{\phi\phi} \equiv g_{22} = 1,$$

$$g_{\theta\phi} \equiv g_{12} = 0,$$

$$\det g = 1 + 4\theta^2.$$

**Coeficientes de la segunda forma cuadrática fundamental**

$$L_{\theta\theta} \equiv L_{11} = \frac{-2}{\sqrt{1+4\theta^2}},$$

$$L_{\theta\phi} \equiv L_{12} = 0, L_{\phi\phi} \equiv L_{22} = 0.$$

**La curvatura media y la curvatura de Gauss**

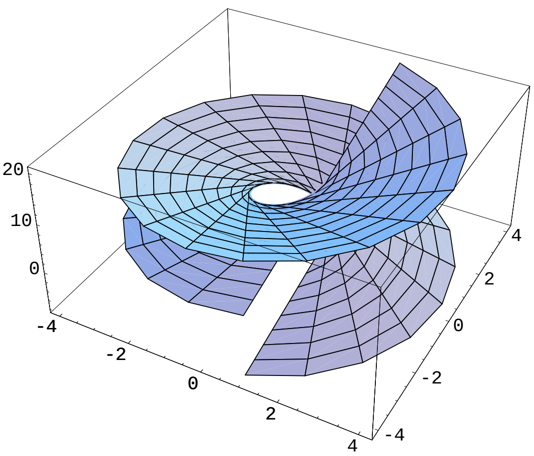
$$H = \frac{-1}{(1+4\theta^2)^{3/2}},$$

$$K = 0.$$

### Desarrollable tangencial de la hélice

Dada la hélice
$$\boldsymbol{r}(\theta) = a\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + a\sin\theta\boldsymbol{e}_2 + b\theta\boldsymbol{e}_3,$$
la superficie desarrollable tangencial es la construida con todas las rectas tangentes a esta curva,
$$\boldsymbol{r}(\theta,\lambda) = \boldsymbol{r}(\theta) + \lambda\boldsymbol{r}'(\theta)$$
$$\boldsymbol{r}(\theta,\lambda) = a(\cos\theta - \lambda\sin\theta)\boldsymbol{e}_1 + a(\sin\theta + \lambda\cos\theta)\boldsymbol{e}_2 + b(\theta+\lambda)\boldsymbol{e}_3,$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_\theta &= -a(\sin\theta + \lambda\cos\theta)\boldsymbol{e}_1 + a(\cos\theta - \lambda\sin\theta)\boldsymbol{e}_2 + b\boldsymbol{e}_3,\\
\boldsymbol{r}_\lambda &= -a\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + a\cos\theta\boldsymbol{e}_2 + b\boldsymbol{e}_3,\\
\boldsymbol{r}_{\theta\theta} &= -a(\cos\theta - \lambda\sin\theta)\boldsymbol{e}_1 - a(\sin\theta + \lambda\cos\theta)\boldsymbol{e}_2,\\
\boldsymbol{r}_{\theta\lambda} &= -a\cos\theta\boldsymbol{e}_1 - a\sin\theta\boldsymbol{e}_2,\\
\boldsymbol{r}_{\lambda\lambda} &= 0.
\end{aligned}$$



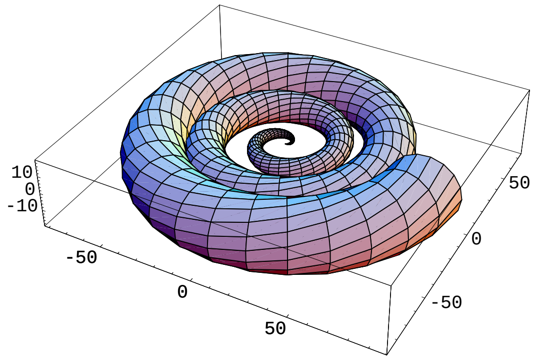

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\lambda}{|\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\lambda|} = (-b\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + b\cos\theta\boldsymbol{e}_2 - a\boldsymbol{e}_3)\,/\sqrt{a^2+b^2}$$
$$g_{\theta\theta} = b^2 + a^2(1+\lambda^2), \quad g_{\theta\lambda} = a^2+b^2, \quad g_{\lambda\lambda} = a^2+b^2.$$
$$L_{\theta\theta} = -ab\lambda/\sqrt{a^2+b^2}, \quad L_{\theta\lambda} = 0, \quad L_{\lambda\lambda} = 0.$$
$$H = \frac{-b}{2a\lambda\sqrt{a^2+b^2}}, \quad K = 0.$$

## Nautilus o caracol

Dada la superficie

$$\boldsymbol{r}(u,v) = u\cos u(4+\cos(u+v))\boldsymbol{e}_1 + u\sin u(4+\cos(u+v))\boldsymbol{e}_2 + u\sin(u+v)\boldsymbol{e}_3,$$

con $u \in (0, 6\pi)$, $v \in (0, 2\pi)$ se tiene la figura

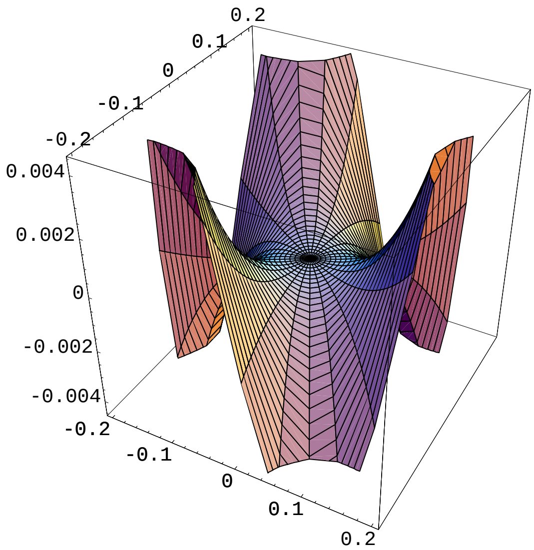



## Silla de mono

Dada la superficie

$$\boldsymbol{r}(u,v) = u\cos v\boldsymbol{e}_1 + u\sin v\boldsymbol{e}_2 + u^3\cos(3v)\boldsymbol{e}_3,$$

con $u \in \mathbb{R}^+$, $v \in [0, 2\pi]$, se denomina **silla de mono**, ya que posee dos zonas para las piernas y otra para el rabo.



# Bibliografía


[1] M.R. Spiegel, Complex variables, McGraw Hill Book CO. N.Y. (1964).

[2] M. Evgrafov et al., Recueil de problèmes sur la théorie des fonctions analytiques, Mir, Moscow (1974).

[3] R.V. Churchill, Teoría de funciones de variable compleja, Ediciones del Castillo, Madrid (1970).

[4] E.G. Phillips, Funciones de variable compleja, Dossat, Madrid (1958).

[5] M. Lipschutz, Geometría Diferencial, McGraw Hill Book CO. N.Y. (1971).

[6] E. Vidal Abascal, Geometría Diferencial, Dossat, Madrid (1956).

[7] A.S. Fedenko, Problemas de Geometría diferencial, Mir, Moscow (1991).